EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA

VOLUME 5

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Manoel Benedito Rodrigues

Álvaro Zimmermann Aranha

Álvaro Zimmermann Aranha
Manoel Benedito Rodrigues
(os autores são professores do Colégio Bandeirantes de São Paulo)

Exercícios de Matemática - vol. 5

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Outras obras da Editora Policarpo:

Autores: Álvaro Zimmermann Aranha
Manoel Benedito Rodrigues
– *Coleção Exercícios de Matemática*
Volume 1 – Revisão de 1º Grau
Volume 2 – Funções e Logaritmos
Volume 3 – Progressões Aritméticas e Geométricas
Volume 4 – Análise Combinatória e Probabilidade
Volume 6 – Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas

Autor: Gil Marcos Ferreira
– *Exercícios de Física (Cinemática)*

Autor: Luiz Gianini
– *Fundamentos de Atomística*
– *Fundamentos de Química Orgânica*

2ª impressão

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Aranha, Álvaro Zimmermann
Matrizes, determinantes e sistemas lineares /
Álvaro Zimmermann Aranha, Manoel Benedito Rodrigues.
-- 1. ed. -- São Paulo : Policarpo,
1994.-- (Exercícios de matemática ; v.5).

1. Determinantes 2. Determinantes - Problemas, exercícios, etc. 3. Matrizes 4. Matrizes - Problemas, exercícios, etc. 5. Equações lineares 6. Equações lineares - Problemas, exercícios, etc. I. Rodrigues, Manoel Benedito. II. Título. III. Série.

94-2586 CDD-510.07

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.07

Editora Policarpo Ltda.
Rua Pereira da Silva, 138
São Paulo - SP
03162-110
✆ (011) 288-0895
✆ (011) 287-3819

Apresentação

Os livros da coleção **Exercícios de Matemática** apresentam forte intenção de oferecer aos estudantes de Matemática (do que é lecionado em 1º e 2º graus) uma numerosa e abrangente lista de exercícios, todos com resposta, que foram elaborados e colocados em ordem tal que resultasse num crescimento extremamente suave do seu grau de dificuldade, isto é, desde os muito simples até aqueles exercícios e problemas mais complexos.

Para facilitar a utilização deste livro por alunos e professores, cada capítulo é formado por Resumos Teóricos, Exercícios, Exercícios de Fixação e Exercícios Suplementares.

Na parte que chamamos Exercícios, estão aqueles iniciais e básicos que, normalmente, são resolvidos em sala de aula; os Exercícios de Fixação têm a finalidade de fazer com que o aluno adquira uma razoável prática nos diversos tópicos estudados; em seguida, os Exercícios Suplementares, geralmente mais sofisticados, visam ampliar e aprofundar os conhecimentos obtidos anteriormente.

No final de cada volume desta coleção, o leitor encontrará uma seleção de testes e questões, recentes ou não, retirados dos principais exames vestibulares não só de São Paulo como de outros Estados brasileiros.

Desde já, agradecemos por eventuais comentários, críticas ou sugestões que nos sejam enviados pelos leitores deste trabalho, pois, para nós, terão grande importância e serão muito bem recebidos.

Matrizes

A – Introdução

Matriz é uma tabela retangular de números colocados em filas: as filas horizontais são chamados de **linhas** e as filas verticais, **colunas**.

Os elementos da matriz podem ser colocados entre parênteses ou entre colchetes ou entre duas barras verticais.

Veja os exemplos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ← linha de ordem 1 (1ª linha) = L_1; ← linha de ordem 3 (3ª linha) = L_3

↑ coluna de ordem 2 (2ª coluna) = C_2

Esta matriz é de ordem 3×2 (3 por 2), ou seja, 3 linhas e 2 colunas.

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ \pi & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}$

é do tipo 3×3 (3 por 3), ou seja, 3 linhas e 3 colunas. Neste caso, dizemos que B é uma matriz quadrada de ordem 3.

c) $C = \begin{Vmatrix} \frac{-3}{4} & 2 & 1 & \sqrt{3} \end{Vmatrix}$

é de ordem 1×4 (1 linha e 4 colunas). Esta matriz, em particular, recebe o nome de matriz–linha.

B – Definição

Dados os conjuntos $I = \{1,2,...,m\}$ e $J = \{1,2,...,n\}$, onde $m, n \in N^*$, e o produto cartesiano $I \times J = \{(i, j) \mid i \in I \wedge j \in J\}$, definimos:

Matriz real de ordem $m \times n$ é toda função f de $I \times J$ em R.

Observações:

1ª) Essa definição pode, em estudo posterior, ser estendida para o conjunto dos números complexos (C).

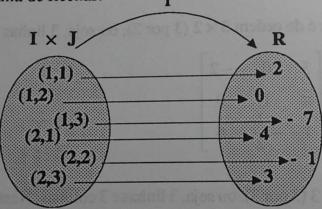
2ª) Podemos indicar uma matriz através de seu elemento genérico a_{ij}:
$A = (a_{ij})_{m \times n}$ onde
$i = 1,2,\ldots, m$ indica a linha a que pertence o elemento a_{ij}.
$j = 1,2, \ldots, n$ indica a coluna a que pertence o elemento a_{ij}.

Exemplo

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{2\times3}$ seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

onde $I = \{1,2\}$ (linhas) e $J = \{1,2,3\}$ (colunas).

Essa matriz, que é uma **função** f de $I \times J$ em **R**, pode ser representada através do seguinte diagrama de flechas:

Indicamos uma matriz genérica $A = (a_{ij})_{m \times n}$, do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observações:

1ª) Os elementos a_{ij} de uma mesma linha têm o primeiro índice (i) constante.

2ª) Os elementos a_{ij} de uma mesma coluna têm o segundo índice (j) constante.

3ª) $D_A = I \times J$ é chamado de domínio da matriz A.

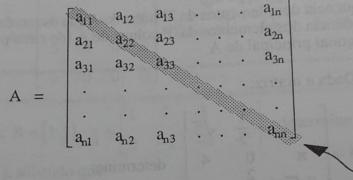
C – Matriz Quadrada

Uma matriz $A_{m \times n}$ é quadrada quando tem o número de linhas igual ao número de colunas (m = n):

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = (a_{ij})_n$$

e, neste caso, dizemos que "A é uma matriz do tipo $n \times n$" ou, simplesmente, "A é uma matriz quadrada de ordem n".

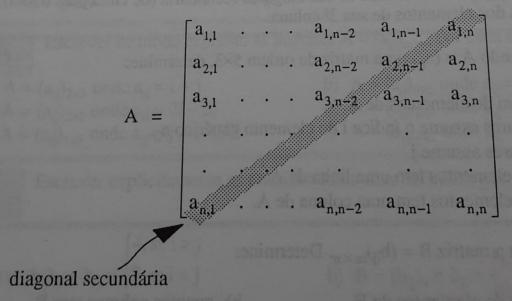
C.1 – Diagonal Principal de Uma Matriz Quadrada

A diagonal principal da matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$ é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$ (a_{11}, a_{22}, etc...). Observe:

diagonal principal

C.2 – Diagonal Secundária de Uma Matriz Quadrada

A diagonal secundária da matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$ é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$. Observe:

diagonal secundária

Exercícios

1 Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -5 & -3 \\ 2 & 5 & -4 & 8 & -8 \\ 3 & -1 & -6 & 9 & -7 \\ 4 & -2 & 7 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$ determine

a) o número de elementos dessa matriz.
b) o tipo (ou ordem) de A.
c) os elementos a_{32}, a_{14} e a_{45}.
d) a seqüência dos elementos da 2ª linha de A (da esquerda para a direita).
e) a seqüência dos elementos da 3ª coluna de A (de cima para baixo).
f) a diagonal principal de A.

2 Dada a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 4 \\ -\sqrt{3} & \frac{2}{5} & 2 \end{bmatrix}$$ determine:

a) a ordem (ou tipo) dessa matriz e o seu número de elementos.
b) os elementos b_{12}, b_{21} e b_{43}.
c) a seqüência dos elementos de sua diagonal principal (de cima para baixo).
d) a seqüência dos elementos de sua diagonal secundária (de cima para baixo).
e) a soma dos elementos de sua 2ª coluna.

3 Sendo $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem 5×3, determine:

a) o número de elementos de A.
b) que valores assume o índice i do elemento genérico a_{ij}.
c) que valores assume j.
d) quantos elementos tem uma linha de A.
e) quantos elementos tem uma coluna de A.

4 Seja a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Determine:

a) o número de elementos de B.
b) quantas colunas tem B.
c) quantos elementos tem uma linha de B.

5 Determine, em cada caso, a ordem da matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e os valores que os índices i e j assumem.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}-2 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$ c) $A=[-4]$

d) $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$ e) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ f) $A=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 6\end{bmatrix}$

g) $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ h) $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ i) $A=[1 \quad 4]$ j) $A=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

6 Dada a matriz $B=\left(b_{ij}\right)_{2\times 4}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$, determine, em cada caso, os valores de i e j, sabendo que:

a) $b_{ij}=4$ b) $b_{ij}=-1$ c) $b_{ij}=0$

7 Escrever explicitamente, isto é, escrevendo todos os seus elementos, a matriz que se pede em cada caso:

a) $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ b) $B = (b_{ij})_{3\times 2}$ c) $C = (c_{ij})_{1\times 5}$
d) $D = (d_{ij})_{3\times 3}$ e) $E = (e_{ij})_{4\times 1}$ f) $F = (f_{ij})_{1\times 1}$

8 Escrever de modo explícito as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, em cada caso:

a) $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ onde $a_{ij} = i + j$ b) $A = (a_{ij})_{4\times 1}$ onde $a_{ij} = i^2 - j^2$
c) $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ onde $a_{ij} = 2i - 3j$ d) $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ onde $a_{ij} = i\,(-1)^{i+j}$
e) $A = (a_{ij})_{1\times 3}$ onde $a_{ij} = j + (-1)^{i+j}$ f) $A = (a_{ij})_{4\times 2}$ onde $a_{ij} = ij\,(-1)^{i+j}$

9 Escrever explicitamente as matrizes quadradas definidas por:

a) $B = (b_{ij})_3$ e $b_{ij}=\begin{cases}4, \text{se } i>j\\ 3, \text{se } i=j\\ 1, \text{se } i<j\end{cases}$ b) $B = (b_{ij})_4$ e $b_{ij}=\begin{cases}i, \text{se } i=j\\ 0, \text{se } i\neq j\end{cases}$

c) $B = (b_{ij})_2$ e $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

d) $B = (b_{ij})_4$ e $b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i > j \\ i + j, \text{ se } i \leq j \end{cases}$

e) $B = (b_{ij})_3$ e $b_{ij} = \begin{cases} i^j, \text{ se } i \geq j \\ 0, \text{ se } i < j \end{cases}$

10 Observe as seguintes notações:

1) $\mathbf{M_n}$ é o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n.
2) $\mathbf{M_{m \times n}}$ é o conjunto de todas as matrizes retangulares de ordem m×n.
Nessas condições, diga a que conjuntos pertencem as matrizes do exercício 5.

11 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3\times4}$, sabendo que $a_{ij} = \text{mmc}(i,j)$.
Obs.: mmc(i,j) = mínimo múltiplo comum dos índices i e j.

12 Dada uma matriz quadrada de ordem n, chama–se "traço de A" (indica–se T (A)) à soma dos elementos de sua diagonal principal. Assim:

$$T(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Nessas condições, determine, em cada caso, o valor do número real T (A):

a) $A = (a_{ij})_3$ e $a_{ij} = j - i$

b) $A = (a_{ij})_2$ e $a_{ij} = j\,(i + j)$

c) $A = (a_{ij})_4$ e $a_{ij} = j^i\,(-1)^{i+j}$

d) $A = (a_{ij})_5$ e $a_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i < j \\ i, \text{ se } i = j \\ -3, \text{ se } i > j \end{cases}$

D – Nomenclatura de Algumas Matrizes Notáveis

D.1 – Matriz–linha

É toda matriz com uma única linha.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \end{bmatrix}$$

D.2 – Matriz–Coluna

É toda matriz com uma única coluna. $A = (a_{ij})_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}$

D.3 – Matriz–Diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero.

$A = (a_{ij})_n$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$

Observação: os elementos da diagonal principal podem ser números reais quaisquer: nulos ou não.

D.4 – Matriz Triangular

É toda matriz quadrada em que os elementos situados acima (ou abaixo) da diagonal principal são todos nulos.

$A = (a_{ij})_n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & . & . & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Podemos ter, também: $A = (a_{ij})_n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & . & . & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & . & . & a_{4n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

D. 5 – Matriz Nula – $O_{m \times n}$

É a matriz (quadrada ou não) com todos os elementos nulos.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $a_{ij} = 0$, para qualquer par ordenado (i,j) do domínio de A. Indica–se $0_{m \times n}$.

D.6 – Matriz–Identidade (Matriz–Unidade) – I_n

É a matriz–diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1.

$$A = (a_{ij})_n \text{ e } a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ para } i = j \\ 0, \text{ para } i \neq j \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . \\ . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

Observações:

1ª) Toda matriz identidade (matriz–unidade) é, também, matriz triangular e matriz–diagonal.

2ª) Toda matriz–diagonal é, também, matriz triangular.

3ª) Toda matriz nula quadrada é, também, matriz triangular e matriz diagonal.

E – Igualdade de Matrizes

Definição

As matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais, se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para quaisquer valores de i = 1, 2, 3, ..., m e de j = 1, 2, 3, ..., n.

Observação: para que duas matrizes A e B sejam iguais é necessário que tenham a mesma ordem.

13 Escreva, em cada caso, a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e, a seguir, classifique–a de acordo com a nomenclatura das matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$, onde $a_{ij} = 0, \forall (i, j) \in D_A$(domínio da matriz A)

b) $A = (a_{ij})_{3 \times 1}$, onde $a_{ij} = i^2$

c) $A = (a_{ij})_{1 \times 1}$, onde $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

d) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, onde $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

e) $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, onde $a_{ij} = \begin{cases} 2^i + 2^j & \text{se } i \leq j \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$

14 Escreva, em cada caso, a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ pedida e, a seguir, classifique–a:

a) $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, onde $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

b) $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, onde $b_{ij} = 0, \forall (i, j) \in D_B$

c) $B = (b_{ij})_{1 \times 4}$, onde $b_{ij} = (-3)^j + i$

d) $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, onde $b_{ij} = \begin{cases} (-1)^i + (-2)^j & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

e) $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, onde $b_{ij} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{se } i \geq j \\ 0 & \text{se } i < j \end{cases}$

15 Determine os valores de a, b, c, ..., de modo que se verifiquem as seguintes igualdades de matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -2 \\ 4 & 3 & c \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 3 \\ c & d \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} a+b & 4 \\ -1 & c-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2c-d \\ a-b & 7 \end{bmatrix}$

16 Dada a matriz:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & \pi & \frac{1}{2} \\ -1 & -3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

e sabendo que $B = (b_{ij})_{4 \times 3}$ é tal que $b_{ji} = a_{ij}$, $\forall$ (i, j) $\in D_A$, determine:

a) b_{31} b) b_{43} c) b_{33} d) b_{44} e) b_{23}

17 Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, determine, em cada caso, a matriz $B = (b_{ji})_{n \times m}$ tal que $a_{ij} = b_{ji}$ para qualquer (i, j) do domínio da matriz A:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (note que: $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{21}, a_{13} = b_{31}$ etc.)

b) $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = (a_{ij})_{5 \times 1}$, onde $a_{ij} = (2j)^i$

d) $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ onde $a_{ij} = \begin{cases} i \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$

e) $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, onde $a_{ij} = i^j(-1)^{i+j}$

18 Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, tal que $a_{ij} = ij$, e $B = (b_{ij})_{4 \times 3}$, tal que $b_{ij} = \frac{i}{j}$, determine os seguintes elementos de $C = (c_{ij})_{4 \times 3}$:

a) $c_{11} = a_{11} + b_{11}$ b) $c_{23} = a_{23} + b_{23}$ c) $c_{22} = a_{22} + b_{22}$ d) $c_{42} = a_{42} + b_{42}$

19 Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, em cada caso, determine a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ sabendo que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo (i, j) do domínio dessas matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \\ -3 & -5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

c) $A = (a_{ij})_{5 \times 1}$, onde $a_{ij} = \frac{i}{j}$, e $B = (b_{ij})_{5 \times 1}$, onde $b_{ij} = \frac{j}{i}$

d) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, onde $a_{ij} = i + j$, e $B = O_{2 \times 2}$

20 Dadas as matrizes:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

determine, em cada caso, a matriz $C = (c_{ij})_{3 \times 2}$, sabendo que:

a) $c_{ij} = 2\,a_{ij}, \forall$ (i, j) $\in D_A$ (domínio de A)

b) $c_{ij} = -3b_{ij}, \forall$ (i, j) $\in D_B$

c) $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \forall$ (i, j) $\in D_A$

d) $c_{ij} = 3\,b_{ij} - 4\,a_{ij}, \forall$ (i, j) $\in D_A$

21 Dadas as matrizes:

$$A=(a_{ij})_{2x3}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \text{ e } B=(b_{jk})_{3x3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & -4\\ 0 & 3 & 6\end{bmatrix}, \text{ calcule}$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\,.\,b_{j3} = a_{21}\,.\,b_{13} + a_{22}\,.\,b_{23} + a_{23}\,.\,b_{33}$$

Observação: Note que, para $j = 1, 2, 3$, a_{2j} é a 2ª linha de A e b_{j3} é a 3ª coluna de B.

22 Considerando as mesmas matrizes do exercício anterior, calcule:

a) $\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\,.\,b_{j2}$ (1ª linha × 2ª coluna)

b) $\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\,.\,b_{j1}$ (2ª linha × 1ª coluna)

Observação: note que o nº de colunas de A é igual ao nº de linhas de B.

23 Sejam as matrizes

$$A=(a_{ij})_{4x3}=\begin{bmatrix}7 & 1 & 10\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 5 & -2\\ -4 & 13 & 6\end{bmatrix} \text{ e } B=(b_{jk})_{3x2}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\\ 1 & -6\end{bmatrix}$$

Escreva, usando a notação de somatória $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.\,b_{jk}\right)$, como está no enunciado do exercício anterior, as seguintes somas:

a) $0\,.\,2 + 5 \cdot 0 + (-2) \cdot 1$

b) $7 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + 10 \cdot (-6)$

c) $(-4)(-1) + 13 \cdot 4 + 6 \cdot (-6)$

24 Dadas as matrizes:

$$A=(a_{ij})_{2x4}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4 & 1\\ 1 & -5 & 0 & -2\end{bmatrix} \text{ e } B=(b_{jk})_{4x1}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}, \text{ calcule:}$$

a) $\sum_{j=1}^{4} a_{1j}\,.\,b_{j1}$

b) $\sum_{j=1}^{4} a_{2j}\,.\,b_{j1}$

Observação: chamaremos estas somatórias de produto linha × coluna.

25 Sendo:

$$A = (a_{ij})_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = (b_{jk})_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{, calcule:}$$

a) $\sum_{j=1}^{2} a_{2j} . b_{j2}$ b) $\sum_{j=1}^{2} a_{3j} . b_{j2}$ c) $\sum_{j=1}^{2} a_{1j} . b_{j1}$

26 Dadas as matrizes:

$$A = (a_{ij})_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = (b_{jk})_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \text{ determine a}$$

matriz $C = (c_{ik})_{3 \times 3}$, em que $c_{ik} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \cdot b_{jk}$, ou seja, $c_{11} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} . b_{j1}$,

$c_{12} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} . b_{j2}$, $c_{13} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} \cdot b_{j3}$, $c_{21} = \sum_{j=1}^{2} a_{2j} \cdot b_{j1}$, e assim por diante.

27 Sendo

$$A = (a_{ij})_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = (b_{jk})_{3\times4} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \text{determi-}$$

ne $C = (c_{ik})_{2 \times 4}$, onde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} . b_{jk}$

F – Adição de Matrizes

Definição: Dadas as matrizes de mesma ordem $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$, chama–se soma das matrizes A e B à matriz

$A + B = C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall$ (i, j) $\in D_C$.

Observação: Se as matrizes A e B não tiverem a mesma ordem, não se define a matriz A + B.

F.1 – Propriedades da Adição de Matrizes

a) **Comutativa**

$A + B = B + A$, $\forall$ A, B $\in M_{m \times n}$.

b) **Associativa**

$(A + B) + C = A + (B + C), \forall\ A, B, C \in M_{m\times n}$

Lembre–se: *$M_{m\times n}$ é o conjunto de todas as matrizes reais de ordem $m\times n$.*

c) **Elemento neutro da adição** (e.n.a.)

Dada a matriz $A_{m\times n}$, existe a matriz $X_{m\times n}$ tal que

$A + X = X + A = A$

É imediato que e.n.a $= X = O_{m\times n}$ (matriz nula) e, portanto,

$$A + O_{m\times n} = A$$

d) **Elemento inverso aditivo** (e.i.a) *(matriz oposta)*

Dada a matriz $A_{m\times n}$, existe a matriz $X_{m\times n}$ (matriz oposta de A) tal que

$$A + X = O_{m\times n}$$

Indica–se: e.i.a. $= X = - A$ e, portanto,

$$A + (- A) = O_{m\times n}$$

Observação: *Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ então a matriz oposta de A é $-A = (-a_{ij})$, $\forall (i, j) \in D_A$.*

F.2 – Subtração de Matrizes

Definição: Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, definimos

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

ou seja, $C = A - B = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $\forall (i, j) \in D_A$.

F.3 – Equações Matriciais

a) $\boxed{X + A = B} \Rightarrow \boxed{X = B - A}$

$\forall A, B, X \in M_{m\times n}$.

Resolução

$X + A = B$

$(X + A) + (-A) = B + (-A)$

$X + [A + (-A)] = B - A$

$X + O_{m\times n} = B - A$

$\therefore X = B - A$

b) $\boxed{X - A = B} \Rightarrow \boxed{X = B + A}$

$\forall A, B, X \in M_{m\times n}$.

Resolução

$X - A = B$

$[X + (-A)] + A = B + A$

$X + [\,(-A) + A\,] = B + A$
$X + O_{m \times n} = B + A$
$X = B + A$

***Observação:** evidentemente, teremos:*

$$A + X = B \Rightarrow X = B - A$$

G – Multiplicação: Número Real × Matriz

Definição: sendo dados o número $\alpha \in R$ e a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, definimos $\alpha . A = B = (b_{ij})_{m \times n}$, onde $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $\forall\,(i, j) \in D_A$.
αA é o produto de um número (chamado de escalar) por uma matriz.

G.1 - Propriedades

Sendo $\alpha, \beta \in R$ e $A, B \in M_{m \times n}$, demonstra–se que:

a) $\alpha . (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B = (A + B) \cdot \alpha$
b) $(\alpha + \beta) . A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A = A \cdot (\alpha + \beta)$
c) $\alpha \cdot (\beta A) = \beta \cdot (\alpha A) = (\alpha\beta) \cdot A$
d) $1 \cdot A = A$
e) $(-1) \cdot A = -A$ (matriz oposta de A)
f) $-(-A) = (-1) \cdot [\,(-1) \cdot A\,] = A$
g) $\alpha \cdot 0_{m \times n} = 0_{m \times n}$ (matriz nula)
h) $0 \cdot A = 0_{m \times n}$

G.2 - Equações Matriciais

a) $\boxed{\alpha . X = A} \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{\alpha} \cdot A}$

$\alpha \in R^*$ e $A, X \in M_{m \times n}$

Resolução:

$\alpha \cdot X = A \; (\alpha \neq 0)$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot X = \frac{1}{\alpha} \cdot A$$

$$1 \cdot X = \frac{1}{\alpha} \cdot A$$

$$X = \frac{1}{\alpha} \cdot A$$

b) $\boxed{\alpha \cdot (X + A) = B} \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{\alpha} \cdot B - A}$

$\alpha \in R^*$ e $A, B, X \in M_{m \times n}$

resolução

$\alpha . (X + A) = B \ (\alpha \neq 0)$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot (X + A) = \frac{1}{\alpha} \cdot B$$

$$1 \cdot (X + A) = \frac{1}{\alpha} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X + A = \frac{1}{\alpha} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{\alpha} \cdot B - A$$

28 Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 12 \\ -3 & 6 & 9 \\ 0 & -15 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

efetue, em cada caso, as operações indicadas:

a) $A + B$ b) $B - A$ c) $-2 \cdot A$ d) $B + I_3$

e) $0 \cdot B$ f) $I_3 - A$ g) $A + 3 \cdot B$ h) $O_{3\times3} + 2 \cdot B - 3 \cdot I_3$

29 Sendo dados o número real α e a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, sabemos que

$B = \alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \end{bmatrix}$. Reciprocamente, dada a matriz B, podemos colocar

o fator α em evidência: $B = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \alpha A.$

Nessas condições, em cada matriz seguinte, coloque o maior fator $\alpha \in N$ possível em evidência, de modo que resultem apenas **elementos inteiros** na matriz:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -18 \\ -30 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 10 & -35 & 0 & -15 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -72 & 0 \\ 0 & 0 & 108 \end{bmatrix}$

30 Sendo A, B, X $\in M_{m \times n}$, determine a matriz X nas seguintes equações matriciais:

a) $B + X = A$ b) $A - X = B$ c) $B - (X - A) = O_{m \times n}$

d) $2X + B = A + 3X$ e) $2(X - 3B) = B - 3(A - X)$

31 Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

,determine a matriz X, de tipo 2×4, tal que: $-3A + 4(X - 2A) = A - 2(B - X)$

32 Determine $x \in R$, de modo que seja verdadeira a seguinte igualdade de matrizes de ordem 3×2:

$$\begin{bmatrix} 4 & -x \\ x^2 & 7 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^2 & -3x \\ 3x & 5 \\ -1 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ -2 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$$

33 Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

determine as matrizes X, Y $\in M_2$ que satisfazem o sistema de equações matriciais:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 5A - I_2 \\ X - 2Y = 3I_2 - A \end{cases}$$

34 As matrizes abaixo são de ordem 3×1, e x, y, z $\in$ R. Determine o valor de $E = x + y - z$, de modo que seja verdadeira a igualdade:

$$x.\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - y.\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} - 2z.\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -11 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

35 Determine a matriz quadrada de ordem 3 que somada com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ resulte na matriz–identidade I_3.

36 São dadas as matrizes do tipo 14×10

$A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = i + j, (i, j) \in D_A$

$B = (b_{ij}) \mid b_{ij} = j^2 - i, (i, j) \in D_B$

e $C = (c_{ij}) \mid c_{ij} = 2.a_{ij} - b_{ji}, (i, j) \in D_C$

Nestas condições, determine:

(a) c_{58} (b) $c_{(13)9}$ (c) $c_{23} + c_{36} - c_{62}$

H – Multiplicação de Matrizes

Definição: Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, definimos

$$\boxed{A \cdot B = C = (c_{ik})_{m\times p}},$$

onde: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . b_{jk}$

$i = 1, 2, ..., m$

$j = 1, 2, ..., n$

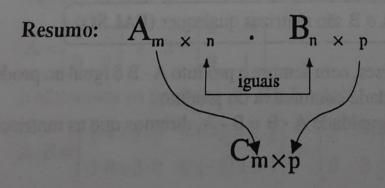
$k = 1, 2, ..., p$

$C = A \cdot B$ é o produto das matrizes A e B, nesta ordem.

Observações:

1ª) O produto $A \cdot B$ só se define quando o número de colunas de A (n) é igual ao número de linhas de B .

2ª) O produto $C = A \cdot B$ é de ordem $m\times p$, isto é, tem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Resumo:

H.1 – Propriedades da Multiplicação de Matrizes

a) Associativa
Dadas as matrizes $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ e $C_{p \times q}$, vale a propriedade
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) Distributiva, à direita, em relação à adição.
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ onde $A, B \in M_{m \times n}$ e $C \in M_{n \times p}$

c) Distributiva, à esquerda, em relação à adição:
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ onde $A \in M_{m \times n}$ e $B, C \in M_{n \times p}$.

d) Sendo $\alpha \in R$, $A \in M_{m \times n}$ e $B \in M_{n \times p}$, vale a propriedade:
$\alpha . (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$

e) Multiplicação pela matriz–identidade (matriz–unidade).
Sendo $A \in M_{m \times n}$, I_n a matriz–identidade de ordem n e I_m a matriz–identidade de ordem m, vale a propriedade:
$A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$

f) Multiplicação pela matriz nula.
Sendo $A \in M_{m \times n}$ e as matrizes nulas $O_{n \times p}$ e $O_{q \times m}$, valem as propriedades:
$A \cdot O_{n \times p} = O_{m \times p}$
$O_{q \times m} \cdot A = O_{q \times n}$

H.2 – Falsas Propriedades do Produto de Matrizes

Há certas propriedades multiplicativas que são válidas para os números reais, que não são válidas para as matrizes e que, por isso, induzem muito freqüentemente a erros.

Para números reais **a** e **b** quaisquer, são verdadeiras as seguintes propriedades:

1) $a \cdot b = b \cdot a$ (propriedade comutativa do produto)

2) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ (lei do anulamento do produto)

Tais propriedades, entretanto, não são sempre válidas para as matrizes. Vejamos:

a) $A \cdot B = B \cdot A$, onde A e B são matrizes quaisquer.**(FALSO)**

Na multiplicação de matrizes, nem sempre o produto $A \cdot B$ é igual ao produto $B \cdot A$, isto é, não vale a propriedade comutativa do produto.

Quando for verdadeira a igualdade $A \cdot B = B \cdot A$, diremos que as matrizes A e B são **comutáveis**.

Analisemos alguns casos de produtos de matrizes, para verificar o que dissemos:

1º) Sejam as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, com $m \neq p$.

Temos: $\begin{cases} A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} \\ B_{n\times p} \cdot A_{m\times n} \quad \text{não se define.} \end{cases}$

Portanto, a igualdade $A \cdot B = B \cdot A$ é falsa.

2º) Sejam as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times m}$, com $m \neq n$.

$A_{m\times n} \cdot B_{n\times m} = C_{m\times m}$

$B_{n\times m} \cdot A_{m\times n} = D_{n\times n}$

As matrizes quadradas C e D não têm a mesma ordem e, portanto, não podem ser iguais. Assim, a igualdade $A \cdot B = B \cdot A$ é falsa.

3º) Sejam as matrizes quadradas $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$

$A_{n\times n} \cdot B_{n\times n} = C_{n\times n}$

$B_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = D_{n\times n}$

Neste caso, como C e D têm mesma ordem, é possível ocorrer

$A \cdot B = B \cdot A$

Vejamos, com um exemplo que, mesmo neste caso, a igualdade pode não ocorrer:

Exemplo

Sejam as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e efetuemos os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1.(-2)+2.1 & 1.4+2.(-1) \\ 0.(-2)+3.1 & 0.4+3.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} -2.1+4.0 & -2.2+4.3 \\ 1.1+(-1).0 & 1.2+(-1).3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a igualdade $A \cdot B = B \cdot A$ é falsa.

4º) Demonstra–se facilmente que uma condição necessária,mas não suficiente, para que as matrizes A e B sejam comutáveis ($A \cdot B = B \cdot A$) é que elas sejam quadradas e de mesma ordem. Observe o **exemplo:**

Sejam as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e efetuemos os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 0 & 1\cdot(-3)+2\cdot 1 \\ 0\cdot 4+3\cdot 0 & 0\cdot(-3)+3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 4.1+(-3).0 & 4.2+(-3).3 \\ 0.1+1.0 & 0.2+1.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, neste exemplo, a igualdade $A \cdot B = B \cdot A$ é verdadeira, embora, como foi mostrado nos exemplos anteriores, nem sempre assim ocorra.

b) $A \cdot B = O_n \Rightarrow A = O_n \vee B = O_n$ **(FALSO)**

onde O_n é a matriz nula e A, B e O_n são matrizes quadradas de ordem n.

Poderemos observar no exemplo seguinte que, ao contrário do que acontece com os números reais, duas matrizes não nulas ao serem multiplicadas podem ter a matriz nula como produto.

Exemplo:

Sejam as matrizes A e B, quadradas e não nulas, seguintes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Efetuemos o produto $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot(-6)+2\cdot3 & 1\cdot(-8)+2\cdot4 \\ 0\cdot(-6)+0\cdot3 & 0\cdot(-8)+0\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times2}$$

Está mostrado, então, que no produto de matrizes pode ocorrer $A \cdot B = 0$ sendo $A \neq O$ e $B \neq O$.

H.3 Potenciação de Matrizes (expoente natural)

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, e α um número natural, definimos:

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ A^1 = A \\ A^{\alpha+1} = A^\alpha \cdot A \ , \alpha \in N | \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Observações

1ª) Como conseqüência dessa definição, temos:

$A^2 = A^1 \cdot A = A \cdot A$

$A^3 = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A) = A \cdot A \cdot A$

$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$, *e assim por diante.*

2ª) Demonstra–se que:

$A^{\alpha+\beta} = A^\alpha \bullet A^\beta$ *onde* $A \in M_n$ *e* $\alpha, \beta \in N$.

3ª) Matriz idempotente

Se A é uma matriz quadrada tal que $A^2 = A$, *então ela é chamada de matriz idempotente*

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$. *Calculemos* A^2:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3+1.(-6) & 3.1+1.(-2) \\ -6.3+(-2).(-6) & -6.1+(-2).(-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = A$$. *Portanto, a matriz A é idempotente.*

4ª) Matriz involutiva

Se A é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^2 = I_n$, *então ela é chamada de matriz involutiva.*

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. *Calculemos* A^2

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2+3.(-1) & 2.3+3.(-2) \\ -1.2+(-2)(-1) & -1.3+(-2)(-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$. *Portanto, a matriz A é involutiva.*

5ª) Matriz nilpotente

Se A é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^2 = \overline{0}$ ($\overline{0}$ *é a matriz nula de ordem n), então ela é chamada de matriz nilpotente.*

Exemplo: Seja a matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ *e calculemos* A^2

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2+4\cdot(-1) & 2\cdot 4+4\cdot(-2) \\ -1\cdot 2+(-2)(-1) & -1\cdot 4+(-2)(-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \overline{O}$$. *Portanto a matriz A é nilpotente.*

37 Dados os tipos das matrizes A e B, determine os tipos das matrizes AB e BA:

a) A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×2.
b) A é do tipo 3×3 e B é do tipo 3×3.
c) A é do tipo 4×3 e B é do tipo 2×4.
d) A é de ordem 3 e B é do tipo 3×2.
e) A é do tipo 4×1 e B é do tipo 1×4.
f) A é do tipo 5×1 e B é do tipo 1×2.

38 Dado o tipo da matriz A, determine o tipo de A^2, nos casos:

a) A é do tipo 3×2.
b) A é do tipo 3×3.
c) A é quadrada de ordem 2.
d) A é do tipo 1×2.

39 Como deve ser uma matriz A para que exista A^2?

40 Se as matrizes A, B e C são tais que C=AB, dados os tipos de duas delas, determine o tipo da outra, nos casos:

a) A é do tipo 2×4 e B é do tipo 4×3.
b) A é do tipo 1×2 e C é do tipo 1×5.
c) B é do tipo 2×3 e C é do tipo 2×3.

41 Calcular os produtos das matrizes seguintes:

a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & -2\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\5 & 4\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}-2 & 3\\5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$

42 Calcular os produtos seguintes:

a) $\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\\0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & 3\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\-2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-5 & 2\\1 & 0\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\-2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & -2 & 0\\3 & -3 & 4\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\0 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\\-5\end{bmatrix}$

43 Calcular os produtos:

a) $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -1\\6 & 0\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}-3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}5 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$

44 Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, determine:

a) AB b) BA c) A^2 d) B^2 e) A^3

45 Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ determine:}$$

a) A^2 b) B^2 c) AB d) BA e) $(2A)(5B)$
f) $(A+B)^2$ g) $A^2+2AB+B^2$

46 Resolver as equações matriciais seguintes:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

47 Determinar os valores das incógnitas:

a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \\ -b & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}$

48 Resolver as seguintes equações matriciais:

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$

49 Verificar se as matrizes $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ comutam.

50 Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2 & x\\ 6 & y\end{bmatrix}$, determine x e y, para que A e B comutem.

51 Obtenha todas as matrizes que comutem com A nos casos:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

52 Mostre que se A e B são comutáveis, então

a) $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$. b) $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$.

53 Verificar se a matriz $A=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ é involutiva, isto é, $A^2=I_2$.

54 Se a matriz A é involutiva, determine:

a) A^{16} b) A^{21} c) A^{77}

55 Verificar se a matriz $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ é idempotente, isto é, $A^2=A$.

56 Se a matriz A é idempotente, determine:

a) A^4 b) A^9 c) A^{23}

57 Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, determine:

a) A^{16} b) A^{65} c) A^{135}.

58 Determine a e b, de modo que a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ a & b\end{bmatrix}$ seja involutiva.

59 Determine x e y, de modo que a matriz $A=\begin{bmatrix}2 & x\\ 3 & y\end{bmatrix}$ seja idempotente.

I - Matriz Transposta

Definição

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se **transposta de A** à matriz $A^t = (b_{ji})_{n\times m}$, em que $b_{ji} = a_{ij}$, para qualquer $(i,j) \in D_A$.

Exemplo:

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$. Sua transposta será $A^t = (b_{ji})_{2\times 3}$ em que

$b_{ji} = a_{ij}$ ($j = 1,2$ e $i = 1,2,3$). Então, teremos:

$b_{11} = a_{11} = 2$ $\quad b_{12} = a_{21} = -1$ $\quad b_{13} = a_{31} = 3$

$b_{21} = a_{12} = 0$ $\quad b_{22} = a_{22} = 1$ $\quad b_{23} = a_{32} = 4$

e, portanto, $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Note que a 1ª linha de A é a 1ª coluna de A^t, a 2ª linha de A é a 2ª coluna de A^t etc, isto é, a matriz transposta transforma linhas em colunas e vice-versa.

I.1- Propriedades da Matriz Transposta

1ª) $(A^t)^t = A$, onde $A \in M_{m\times n}$.

2ª) $(A+B)^t = A^t + B^t$, onde $A, B \in M_{m\times n}$.

3ª) $(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t$, onde $A \in M_{m\times n}$ e $\alpha \in R$.

4ª) $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, onde $A \in M_{m\times n}$ e $B \in M_{n\times p}$

Note que, nesta 4ª propriedade, há uma troca de posição das matrizes.

I.2 - Matriz Simétrica

Se uma matriz quadrada A, de ordem n, é tal que $A = A^t$, então ela é chamada de matriz simétrica.

Exemplo:

Seja a matriz quadrada de ordem 3:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -5 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ Determinada a sua transposta $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -5 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$,

Verificamos, então, que $A = A^t$.

Observações:

1ª) Podemos, também, definir: "$A = (a_{ij})_n$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\,(i,j) \in D_A$"

2ª) Note que, na matriz simétrica A, os elementos situados em posições simétricas em relação à diagonal principal são iguais: $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{32} = a_{23}$.

3ª) Os elementos da diagonal principal de A podem ser números quaisquer, pois quando $i = j$ e $a_{ij} = a_{ji}$, temos $a_{11} = a_{11}$, para qualquer a_{11}. O mesmo acontece com a_{22} e a_{33}.

I.3 - Matriz Anti-Simétrica

Se uma matriz quadrada A, de ordem n, é tal que $A = -A^t$, então ela é chamada de matriz anti-simétrica.

Exemplo:

Seja a matriz quadrada de ordem 4:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \\ -5 & -3 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

. É imediato que, trocando linhas por colunas, teremos $A = -A^t$ e, portanto, a matriz A é anti-simétrica.

Observações:

1ª) Podemos, também, definir: "$A = (a_{ij})_n$ é anti-simétrica, quando $a_{ij} = -a_{ji}$, para qualquer $(i,j) \in D_A$".

2ª) Como $a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} = 0$, obtemos que, numa matriz anti-simétrica, os elementos da diagonal principal são todos nulos.

3ª) Como $a_{ij} = -a_{ji}$, na matriz A, anti-simétrica, os elementos simétricos em relação à diagonal principal são opostos.

I.4 - Equações Matriciais

a) $\boxed{(A + X)^t = B} \Rightarrow \boxed{X = B^t - A}$ $\quad A, X \in M_{m\times n}$ e $B \in M_{n\times m}$

Resolução

$(A + X)^t = B$

$[(A + X)^t]^t = B^t$

$A + X = B^t$

$X = B^t - A$

b) $\boxed{(\alpha \cdot X)^t = A} \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{\alpha} \cdot A^t}$ $\quad \alpha \in R^*, X \in M_{m\times n}$ e $A \in M_{n\times m}$

Resolução

$$(\alpha X)^t = A$$

$$\left[(\alpha X)^t\right]^t = A^t \Rightarrow \alpha X = A^t$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot \alpha X = \frac{1}{\alpha}A^t \Rightarrow X = \frac{1}{\alpha}\cdot A^t$$

60 Determine as transpostas das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ -1 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

d) $D = 0_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

61 Determine, em cada caso, os valores de a, b, ..., de modo que a matriz A seja simétrica:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & a & -7 \\ \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & a & 4 & -1 \\ a^2 & 0 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & (3-b) \\ -1 & 5 & 2a & c \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 6 & d^2 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 3 & (a+b) & (a+c) \\ -1 & 2 & (b+c) \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

62 Determine, em cada caso, os valores de a, b, c..., de modo que a matriz A seja anti-simétrica:

a) $A = \begin{bmatrix} a & 4 & 0 \\ b & 0 & -1 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 & -3 \\ -8 & 0 & 0 & -c \\ \log_b a & 0 & 0 & -2 \\ \log_2 a & \log_2 1 & \log_d 25 & 0 \end{bmatrix}$

63 Dadas as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \text{ calcule:}$$

a) $(A \cdot B)^t$ b) $B^t \cdot A^t$ c) $B \cdot A$

64 Nas equações matriciais seguintes, determine a matriz X e sua ordem:

a) $X^t = A$, $A \in M_{m\times n}$.
b) $(\alpha X)^t = A$, $A \in M_{m\times n}$ e $\alpha \in \mathbf{R}^*$.
c) $(X+A)^t = B$, $A \in M_{m\times n}$ e $B \in M_{n\times m}$.
d) $X^t = A \cdot B$, $A \in M_{m\times n}$ e $B \in M_{n\times p}$.
e) $(A-X)^t = B$, $A \in M_{m\times n}$ e $B \in M_{n\times m}$.
f) $\frac{1}{\alpha} \cdot X^t = A$, $A \in M_{m\times n}$ e $\alpha \in \mathbf{R}^*$
g) $(\alpha \cdot X)^t = A \cdot B$, $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ e $\alpha \in \mathbf{R}^*$.
h) $X^t + A = B^t$, $A \in M_{m\times n}$ e $B \in M_{n\times m}$.
i) $(2X)^t = A^t - B$, $A \in M_{m\times n}$ e $B \in M_{n\times m}$.
j) $(C-X)^t = A \cdot B - C^t$, $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ e $C \in M_{p\times m}$.

65 Determine a matriz X em cada uma das equações matriciais seguintes:

a) $2X^t = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ b) $X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}^t - X$

66 Uma matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ é simétrica, e $a_{ij}=1$, se $i=j$. Determine A, sabendo que:

a) A é involutiva b) A é idempotente

67 Uma matriz $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ é anti-simétrica e idempotente. Determine A.

68 A matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica e $A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, determine A.

69 Dadas as matrizes

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C=\begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$, determine a matriz A, anti-simétrica, que verifica a igualdade AB=C.

J - Matriz Inversa

Definição

Dada a matriz quadrada A de ordem m, chama-se **inversa de A** à matriz A^{-1} tal que

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$$

Exemplo:

A inversa da matriz $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ é a matriz

$A^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$. Verifique que

$$A \cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I_2=A^{-1} \cdot A$$

Observações:

1ª) A matriz A pode admitir ou não matriz inversa . Quando A admite inversa, dizemos que ela é ***inversível*** *ou* ***não singular****. Quando A não admite inversa, dizemos que ela é não* ***inversível*** *ou* ***singular****.*

2ª) A matriz O_{nxn} não admite inversa, mas há matrizes não nulas que também não admitem inversa. Por exemplo, a matriz

$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ *não admite inversa. (posteriormente, justificaremos por que A é singular, isto é, não admite inversa).*

3ª) Evidentemente, a matriz A^{-1} também é quadrada e tem a mesma ordem de A.

J.1 - Propriedades da Matriz Inversa

1ª) $(I_n)^{-1}=I_n$, onde I_n é a matriz identidade.

2ª) Se $A \in M_n$ é inversível, então $(A^{-1})^{-1}=A$

3ª) Se $A, B \in M_n$ são matrizes inversíveis, então $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (observe a troca de posição das matrizes).

4ª) Quando a matriz A é inversível, então a sua inversa A^{-1} é única.

5ª) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$ onde $\alpha \in \mathbf{R}^*$ e A é inversível.

6ª) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, onde A é inversível.

J.2 - Equações Matriciais

a) $\boxed{A \cdot X = B} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$, $A, B \in M_n$ e A é inversível.

Resolução

$A.X=B$

$A^{-1} \cdot A.X = A^{-1} \cdot B$

$I_n X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$

b) $\boxed{X \cdot A = B} \Rightarrow \boxed{X = B \cdot A^{-1}}$, $A, B \in M_n$ e A é inversível.

Resolução

$X \cdot A = B$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$

$X \cdot I_n = B \cdot A^{-1}$

$X = B \cdot A^{-1}$

J.3 - Falsa Propriedade da Igualdade de Matrizes

No conjunto dos números reais vale a propriedade

$$\boxed{a \cdot b = a \cdot c} \Rightarrow \boxed{b = c}, \text{ a, b, c} \in \text{R e } a \neq 0$$

Tal propriedade, entretanto, não é válida para as matrizes, isto é

$$\boxed{A \cdot B = A.C} \Rightarrow \boxed{B = C}, \text{ A, B, C} \in M_n \text{ e } A \neq O_{n \times n} \text{ (FALSO)}$$

Exemplo:

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \neq O_{2\times2}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuemos os produtos $A \cdot B$ e $A \cdot C$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 + 6 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-3)+4\cdot 0 & 2\cdot 4+4\cdot 1 \\ 3\cdot(-3)+6\cdot 0 & 3\cdot 4+6\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}$$

portanto, $A \cdot B = A \cdot C$ e ,como $B \neq C$, temos:

$$\begin{pmatrix} A\cdot B = A\cdot C \\ (A \neq O) \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B=C}$$ é falsa.

J.4 -Matriz Ortogonal

Se uma matriz $A \in M_n$ é inversível e tal que $A^{-1}=A^t$, então ela é chamada de matriz ortogonal.

Exemplo:

Dada a matriz inversível (não singular)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ e determinando A^{-1} e A^t, teremos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A^t$$

Portanto, a é uma matriz ortogonal.

Observação:

Como já vimos,

$A^{-1}=A^t \Rightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \Rightarrow I_n = A \cdot A^t$ *, o que nos sugere outra definição:*

"Uma matriz é ortogonal quando $A \cdot A^t = I_n$*"*

---

70 Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$, pede-se:

a) calcular $A \cdot B$. b) calcular $B \cdot A$.

c) determinar a matriz A^{-1} (inversa de A).

---

71 Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$, determine a matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2$.

---

72 Dada a matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}, \text{ determine a matriz } B=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} \text{ tal que } A\cdot B=I_3$$

73 Determine, se existirem, as inversas das matrizes:

a) $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

74 Dada a matriz

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ tal que $ad-bc\neq 0$, demonstra-se que sua inversa é:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$

Usando o resultado acima, determine as inversas das seguintes matrizes:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 5 & -7\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}\cos x & \text{sen } x\\ \text{sen } x & -\cos x\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}$ e) $E=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

75 Resolva as seguintes equações matriciais em X, sabendo que todas as matrizes envolvidas são quadradas, de ordem n, e não singulares (admitem inversa):

a) $(AX)^t=B$ b) $AXB=C$ c) $AX+B=C$ d) $AX+C=BX$

e) $(XB)^{-1}=A$ f) $(A+X)^t=I_n$ g) $(kX)^t=BC$, onde $k\in R^*$ h) $XA-B=X$

i) $(X\cdot\alpha)^{-1}=AB$, onde $\alpha\in R^*$ j) $2X-B=C+AX$

k) $(\alpha X)^{-1}=(AB)^t$, onde $\alpha\in R^*$ l) $\alpha X^{-1}=A$ onde $\alpha\in R^*$

76 Sabendo que

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$, determine a matriz quadrada X, de ordem 2, tal que $(2X)^{-1}=A\cdot B$

77 Demonstre que:

a) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

78 Determine a matriz X nas seguintes equações:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot X - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -6 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$

79 Determine, em cada caso, os valores de x e y, sabendo que as matrizes A e B são inversas.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ x & y \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & x & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & y & 6 \end{bmatrix}$

80 Determine o elemento a_{21} da matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

81 Demonstre que, se A é uma matriz não singular e A.B=AC, então B=C.

82 Lembrando que uma matriz quadrada e inversível tal que $A.A^t = I_n$ diz-se ortogonal, verifique, em cada caso, se A é ou não ortogonal:

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & -\cos x \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix}$

Exercícios de Fixação

83 Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & -5 & -7 \end{bmatrix}, \text{ determine:}$$

a) o número de linhas. b) o número de colunas. c) o seu tipo.
d) a_{11}, a_{33}, a_{24} e a_{42}
e) a posição (dizer se é a_{11}, a_{32} etc·)dos elementos 1, 7, 8, –3, 3, –7.

84 Considere a matriz A do exercício anterior. Escreva a sequência $(x_1, x_2, \ldots. x_n)$, com o maior número de termos possível, definida nos casos abaixo, onde a_{ij} é elemento de A.

a) $x_n = a_{1n}$ b) $x_n = a_{n1}$ c) $x_n = a_{n2}$ d) $x_n = a_{3n}$
e) $x_n = a_{nn}$ f) $x_n = a_{n,4-n}$ g) $x_n = a_{n,5-n}$ h) $x_n = a_{n+2,\,n+3}$

85 Considerando ainda a matriz do exercício 83, determine:

a) $\sum_{j=1}^{4} a_{1j}$ b) $\sum_{i=1}^{3} a_{i1}$ c) $\sum_{j=1}^{4} a_{2j}$ d) $\sum_{n=1}^{3} a_{nn}$ e) $\sum_{n=1}^{3} a_{n,n+1}$ f) $\sum_{i=1}^{3} (a_{i2} + a_{i3})$

86 Dizer os tipos que a matriz A pode ter, em cada caso, dado o seu número de elementos:

a) 6 b) 5 c) 15 d) 9

87 Dizer qual a ordem de uma matriz quadrada que tem o mesmo número de elementos que a matriz A, sendo dado o tipo de A, nos casos:

a) 2×8 b) 3×12 c) 4×5 d) 25×1

88 Se a_{ij} é elemento da diagonal secundária de uma matriz A, determine a ordem de A, nos casos:

a) a_{13} b) a_{32} c) a_{57}

89 Escrever a matriz $A=(a_{ij})_{4\times 2}$, em cada caso:

a) $a_{ij} = j - i$ b) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ c) $a_{ij} = \sqrt{|j-i|}$ d) $a_{ij} = \sqrt{(j-i)^2}$

e) $a_{ij} = (-j)^i$ f) $a_{ij} = 2^{j-i}$

90 Escrever as matrizes quadradas definidas por

a) $A = (aij)_3$ e $a_{ij} = \begin{cases} i+j, \text{ se } i=j \\ \log_{i+j}|i-j|, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ b) $B = (b_{ij})_4$ e $b_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}, \text{ se } i \geq j \\ \binom{j}{i}, \text{ se } i < j \end{cases}$

91 Dada a matriz quadrada $A=(a_{ij})_4$, abaixo,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -2 & 4 \\ 5 & -4 & 3 & -5 \\ 6 & 2 & -7 & 0 \\ -6 & 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$, escreva a seqüência $(x_1, x_2, ..., x_n)$ com o maior

número de termos possível, onde a_{ij} é elemento de A, nos casos:

a) $x_n=a_{n2}$ b) $x_n=a_{nn}$ c) $x_n=a_{n,5-n}$ d) $x_n=a_{n,n+1}$ e) $x_n=a_{n+1,5-n}$ f) $x_n=a_{4,5-n}$

92 Considere a matriz A do exercício anterior.Determine:

a) $\sum_{j=1}^{4} a_{2j}$ b) $\sum_{n=1}^{4} a_{nn}$ c) $\sum_{n=1}^{4} a_{n,5-n}$ d) $\sum_{p=1}^{4} a_{2p} \cdot a_{p2}$ e) $\sum_{p=1}^{4} a_{4p} \cdot a_{p3}$

f) $\sum_{n=1}^{4} a_{nn} \cdot a_{n,5-n}$ g) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}$ h) $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=3}^{4} a_{ij}$

93 Considerando ainda a matriz do exercício anterior, expressar com o símbolo de somatória, as seguintes somas:

a) 6+2+(−7)+0 b) 4+(−5)+0+8 c) 1(−2)+2(3)+3(−7)+4(−3)
d) 2(−6)+3(1)+4(−3)+5(8) e) 6·4+2(−5)+(−7)(0)+0·8
f) (−1)(−1)+7(5)+(−2)6+4(−6)

94 Sub-matriz, de uma matriz A do tipo $m \times n$, é toda matriz B do tipo $(m-p)\times(n-q)$ que obtemos em A quando suprimimos dela p linhas e q colunas. Escrever as matrizes quadradas de ordem 2, que sejam sub-matrizes de A, dada $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

95 Dada uma matriz A, do tipo 4×3, determine o número de sub-matrizes de A de ordem:

a) 2 b) 3 c) 2×3 d) 3×2 e) 4×2

96 Quantas sub-matrizes quadradas contém uma matriz A do tipo 4×3?

97 Quantas sub-matrizes de ordem p, com $p \le m$ e $p \le n$, podemos obter de uma matriz A, do tipo $m\times n$?

98 Escrever a matriz A, de ordem 3, nos casos:

a) A é matriz-identidade b) A é matriz-diagonal, com $a_{nn}=n^n$
c) A é matriz triangular, com $a_{ij} = 2j - i$, se $i \le j$
d) A é matriz triangular, com $a_{ij} = i + j$, se $i \ge j$

99 Determine x, y e z para que as matrizes A e B sejam iguais, nos casos:

a) $A=\begin{bmatrix} x-1 & y-2 & 1 \\ z^2-1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} x+3 & -4 \\ 9 & x \\ y+5 & 4 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 7 & z^2-13 \\ 9 & x \\ 5 & x \end{bmatrix}$

100 Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_2$ e $B=(b_{ij})_2$ seguintes

$A=\begin{bmatrix} x^2+6 & 6-y \\ y+4 & x+1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 5x & y^2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, que são iguais, determine:

a) x e y b) A e B c) A matriz $C = (c_{ij})_2$, onde $c_{ij} = a_{ji}$.
d) A matriz $E = e_{ij}$ onde $e_{ij} = 2a_{ij}$

101 Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_3$ e $B=(b_{ij})_3$ seguintes:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \text{ determine}$$

a) $\sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{3j}$ b) $\sum_{n=1}^{3} a_{2n}b_{n3}$ c) A matriz $C=(c_{ij})_3$ tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

d) A matriz $E=(e_{ij})_3$, onde $\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$

102 Simplifique as expressões:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 6 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $2\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}-\frac{3}{2}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

103 Dados

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \text{ determine:}$$

a) A+B+C b) A–B–C c) 2C–A–3B

104 Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ determine a matriz X, nos casos:}$$

a) X–A=B b) 2X+A=B c) A – 2X = X + B

d) 2(X–A)–3(B–X)=2(2X–A)–3B e) X=2(X–3A)–3(X–2B)–4(B–A–X)

105 Dadas as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ resolver os sistemas:}$$

a) $\begin{cases} X - Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6X - Y = A + B \\ 6X + 4Y = 11A - 14B \end{cases}$

106 Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{3\times2}$ e $B=(b_{ij})_{3\times2}$, definidas por $a_{ij}=i^2-j^2$ e $b_{ij}=j^2-3i$, determine a matriz $X=2A-3B$

107 Se as matrizes A, B, X e Y são tais que X=AB e Y=BA, dados os tipos de duas delas, determine os tipos das outras duas, nos casos:

a) A é do tipo 3×4 e B é do tipo 4×3

b) A é do tipo 5×3 e X é do tipo 5×2

c) B é do tipo 6×4 e Y é do tipo 6×6

d) A é do tipo 4×1 e Y é do tipo 1×1

108 Calcular os produtos de matrizes seguintes

a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

109 Achar os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

110 Calcular os produtos:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

111 Calcular os produtos:

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

112 Ache o produto:

$$\begin{bmatrix} 14 & 42 & 28 \\ -28 & -42 & 14 \\ 42 & -14 & 56 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 & -15 \\ 15 & -5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

113 Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, determine

a) AB b) BA c) A^2 d) B^2

114 Resolver as equações matriciais seguintes:

a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

115 Determinear os valores das incógnitas na equação

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & 1 \\ c & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a & c \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

116 Resolver as seguintes equações matriciais:

a) $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$

b) $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X$

117 Verificar se as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -10 & 12 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ comutam.

118 Determine x e y para que A e B comutem nos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -1 & y \end{bmatrix}$

119 Obtenha todas as matrizes que comutam com

$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

120 Se A e B são comutáveis, mostre que:

a) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

b) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

121 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha:

a) A^2 b) A^3 c) A^4 d) A^5 e) A^6

122 Verificar se a matriz

$A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é involutiva.

123 Verificar se a matriz A é idempotente, nos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

124 Verificar se a matriz A é nilpotente, nos casos:

a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

125 Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ Determine a e b, de modo que:

a) A seja involutiva b) A seja idempotente c) A seja nilpotente

126 Dadas as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 16 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C=\begin{bmatrix} -2 & \frac{6}{5} \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \text{ determine:}$$

a) A^5 b) B^{12} c) B^{27} d) C^{20} e) C^{27}

127 Dadas as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } D=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \text{ determine:}$$

a) $A + B^t$ b) $D - 2B - 3A^t$ c) $(A \cdot B)^t$ d) $B^t \cdot A^t$
e) $A^t - 3B - 2 \cdot C \cdot D$ f) $A \cdot C \cdot A^t \cdot B^t$

128 Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2x-4 & z-7 \\ x & x & -z \\ y & y+9 & y \end{bmatrix}. \text{ Determine A, sabendo que } A = A^t.$$

129 Considerando a matriz

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 2x-z & 2y-z \\ 4y-z & 0 & x-1 \\ 2z-3x & 3y-z & 0 \end{bmatrix} \text{ e sabendo que } B = -B^t, \text{ determine B.}$$

130 Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} x+y & 2z+y & 2x+2 \\ 3x+y & x+z & xz-x \\ 3z+y & 2z-x & y+z \end{bmatrix}$$. Se A é simétrica, determine A.

131 A matriz

$$B=\begin{bmatrix} x-3y & xyz & x-2yz \\ 3y^2-x^2 & 3y-3 & x-y-z \\ x^2-z^3 & z^2-4y^2 & 3z-2x \end{bmatrix}$$ é anti-simétrica. Determine B.

132 Sabendo que a matriz

$$C=\begin{bmatrix} x-2y & y+z & y+4z \\ x+5z & y+2z & y-2z \\ x-2 & 4-2x & x+4z \end{bmatrix}$$ é anti-simétrica, determine C.

133 Verificar se B é a matriz inversa de A, isto é, $B = A^{-1}$, nos casos:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

134 Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Determine a matriz $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de modo que $A \cdot B = I_2$.

135 Dada a matriz

$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ de modo que $A \cdot B = I_3$.

136 Determine a matriz inversa de A, se existir, nos casos:

a) $A=\begin{bmatrix}5 & -7\\3 & -4\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}3 & 9\\2 & 6\end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & -2 & 0\end{bmatrix}$

137 Sendo $C = A^{-1}$ e $D = B^{-1}$, determine c_{22} e d_{32}, dados:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 10\\5 & 17\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 1 & 0\\-3 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

138 Dadas as matrizes

$$C=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\-1 & 3 & -3\\0 & 1 & -1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\-1 & 0 & -3\\1 & -2 & 1\end{bmatrix},\ A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 0 & 3\\3 & 0 & 4\end{bmatrix} \text{ e } B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\-2 & 4 & 1\\3 & -1 & 0\end{bmatrix},$$

onde A^{-1} é inversa de A e B^{-1} é a inversa de B, determine a matriz X, de modo que $A\,X\,B + C = D$.

Exercícios Suplementares

139 Ache o produto das matrizes nos casos:

a) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\3 & -2 & 4 & -3\\5 & -3 & -2 & 1\\3 & -3 & -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & 8 & 6 & 9\\5 & 7 & 4 & 5\\3 & 4 & 5 & 6\\2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}5 & 7 & -3 & -4\\7 & 6 & -4 & -5\\6 & 4 & -3 & -2\\8 & 5 & -6 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\1 & 3 & 5 & 7\\2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\3 & 6 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -2 & -4\\-1 & -2 & -4\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\-1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

140 Ache os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

141 Ache os produtos AB e BA, nos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

142 Ache o produto AB, nos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 83 & -29 & -52 & 46 \\ -15 & 97 & 78 & -112 \\ 38 & -4 & 69 & 85 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 83 & -29 & -52 & 46 \\ -15 & 97 & 78 & -112 \\ 38 & -4 & 69 & 85 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

e) $A=\begin{bmatrix} 923 & 2115 & 0 & 0 \\ 1097 & 518 & 0 & 0 \\ 652 & 769 & 0 & 0 \\ 841 & 134 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 476 & 372 & 1505 & 882 \\ 549 & 795 & 999 & 400 \end{bmatrix}$

143 Determine o produto ABC, dadas as matrizes

$A=\begin{bmatrix} 991 & 992 & 993 \\ 994 & 995 & 996 \\ 997 & 998 & 999 \\ 1000 & 1001 & 1002 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

144 Calcule o produto ABCD, dados:

$A=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 213 & 510 & 128 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

145 Ache AB – BA, nos casos:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

146 Calcule:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$

e) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$ f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$

147 Achar f(A), nos casos:

a) $f(x) = x^2 - x - I_3$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 3I_2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

148 Dados $f(x) = 3x^2 - 2x + 5I_3$ e

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, calcule f(A).

149 Calcule f(A), dados $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5I_3$ e

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

150 Mostre que a matriz

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $x^2 - (a + d)x + (ad - bc)I_2 = O_{2\times2}$.

151 Se todos os elementos da matriz

$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ que estão fora da diagonal principal são

nulos, ache A^k.

152 Dada a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$, de ordem n, calcule A^3.

153 Obtenha todas as matrizes B que comutam com A, nos casos:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ e) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ f) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

154 Resolver as seguintes equações matriciais:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ b) $X\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X-X\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

155 Utilizando a igualdade

$$A=\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$, determine A^5.

156 Utilizando a igualdade

$$B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & -5 & 4\end{bmatrix}$$, determine B^6.

157 Achar todas as matrizes quadradas de ordem 2 cujos quadrados são a matriz nula.

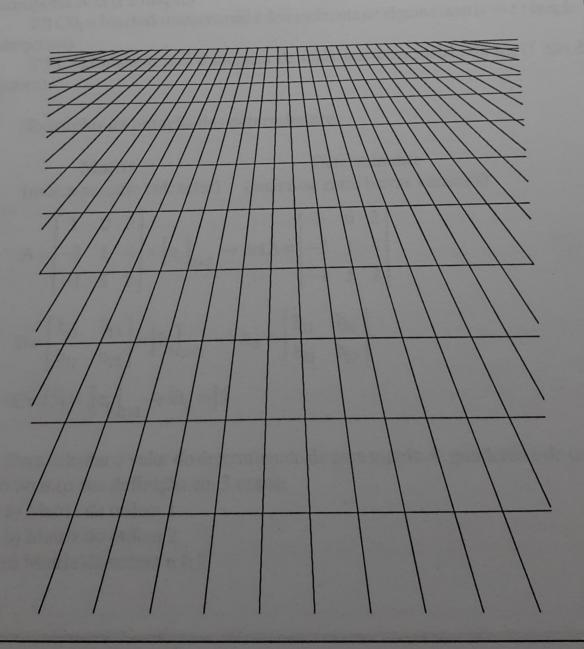
158 Achar todas as matrizes quadradas de ordem 2 cujos quadrados são iguais a matriz unidade.

159 A soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada A é chamada traço de A e indicamos por trA.

Prove as propriedades:

a) $tr(A + B) = trA + trB$ b) $tr(\alpha A) = \alpha(trA)$

c) $trA^t = trA$ d) $tr(AB) = tr(BA)$

Capítulo 2

Determinantes

A - Introdução

O desenvolvimento da teoria dos determinantes (Sec. XVII) se deu a partir do estudo da resolução dos sistemas de equações do 1º grau (Sistemas Lineares).

Sendo M_n o conjunto das matrizes **quadradas** de ordem n, R o conjunto dos números reais e $f: M_n \to \mathbf{R}$ uma função (cuja lei veremos adiante) que associa a cada matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n$ um número $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, dizemos que **a** é o **determinante** da matriz **A**. Indicamos:

$$a = \det A \text{ ou } a = \Delta A \text{ ou } a = \Delta A \text{ ou } a = |A|.$$

Observe que **A** é uma matriz e **a** é um número real associado à matriz **A**. Mais adiante, poderemos notar que **f** é uma função sobrejetora e não injetora, pois:

1º) Cada matriz de M_n tem um único determinante (número real) em correspondência (f é função).

2º) $CD_f = Im_f$ (todo número real é determinante de alguma matriz $\Rightarrow$ f é função sobrejetora).

3º) Cada número real é imagem de mais que uma matriz de M_n (f não é injetora).

Exemplos da notação dos determinantes

Matriz (indica-se entre colchetes)	**Determinante** (indica-se entre barras verticais)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{3\times3} \to \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = [b_{ij}]_{2\times2} \to \Delta_B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$C = [5] = [c_{ij}]_{1\times1} \to D_C = |5|$$

Para calcular o valor do determinante de uma matriz A, quadrada e de ordem n, dividiremos sua definição em 3 casos:

a) Matriz de ordem 1

b) Matriz de ordem 2

c) Matriz de ordem $n \geq 2$

B - Definição

B. 1 - 1º caso: n = 1

$$A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Exemplos:

$$A = [3] \Rightarrow \det A = |3| = 3$$

$$B = \left[-\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \det B = \Delta_B = \left|-\frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{2}$$

$$C = [\pi] \Rightarrow \det C = D_C = |\pi| = \pi$$

B. 2 - 2º caso: n = 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Exercícios

160 Calcule det A, em cada caso, sendo:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ b) $A = [-\sqrt{2}]$ c) $A = \left[\frac{3}{5}\right]$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $A = [-0,\overline{3}]$ f) $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ h) $A = [0]$ i) $A = [1]$

j) $A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} a & \operatorname{sen} b \\ -\cos a & \cos b \end{bmatrix}$ k) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ l) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

161 Dada a matriz de ordem 3

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$, determine as matrizes de ordem 2 que se obtêm de A:

a) eliminando-se a 1ª linha e a 1ª coluna de A
b) eliminando-se a 3ª linha e a 2ª coluna de A
c) eliminando-se a 2ª linha e a 2ª coluna de A
d) eliminando-se a 2ª linha e a 3ª coluna de A

Obs. : estas matrizes são submatrizes de ordem 2 da matriz A.

162 Calcule os determinantes das matrizes de ordem 2 obtidas no exercício anterior.

163 Dada a matriz

$$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$, calcule os seguintes produtos, formados com elementos dessa matriz:

a) $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$ b) $a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$ c) $a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$ d) $-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$
e) $-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$ f) $-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}$

Antes de passarmos para o 3º caso da definição de determinantes ($n\geq 2$), precisamos definir **menor complementar** e **complemento algébrico** do elemento a_{ij}.

B. 3 - Menor Complementar

Definição

Sendo A uma matriz quadrada de ordem $n\geq 2$ e a_{ij} um elemento de A, chama-se **menor complementar** do elemento a_{ij} (indica-se M_{ij}) ao determinante da matriz de ordem $(n-1)$ que se obtém de A eliminando-se a linha **i** e a coluna **j**.

Exemplos

a) Dada a matriz: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, o menor complementar do elemento $a_{12}=2\in A$

é o determinante $M_{12} = |3| = 3$ (foram eliminadas a 1ª linha e a 2ª coluna de A).

b) Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, o menor complementar do elemento b_{21} $= 5 \in B$ é o determinante $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3) - (3)\cdot(-2) = 3 + 6 = 9$ (foram eliminadas a 2ª linha e a 1ª coluna de B).

B. 4 - Complemento Algébrico (cofator)

Definição

Sendo A uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, a_{ij} um elemento de A e M_{ij} o seu menor complementar, chama-se **complemento algébrico** (ou cofator) de a_{ij} ao número

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, vamos calcular os complementos algébricos A_{21}, A_{33} e A_{22}:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 9 = -9$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (+1)\cdot 7 = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = (+1)\cdot(-21) = -21$$

B. 5 - 3º caso: Definição de determinante com ordem $n \geq 2$ (lei de recorrência).

Sejam: A uma matriz de ordem $n \geq 2$ e $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n})$ a sua primeira linha.

Nessas condições, definimos:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + ... + a_{1n} \cdot A_{1n},$$

isto é, o determinante de A é calculado somando-se os produtos dos elementos da 1ª linha de A pelos seus respectivos cofatores.

Exemplos:

a) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, calculemos $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix}$, começando pelos cofatores A_{11}, A_{12} e A_{13}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 39$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -22$$

A seguir, podemos calcular:

$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

$\det A = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 39 + 3 \cdot (-22) = 2 - 39 - 66$

$\det A = \Delta_A = \Delta_A = -103$

b) Calculemos, agora, detB, sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$:

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |4| = 4$$

$B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |3| = -3$. Portanto:

$\det B = b_{11} \cdot B_{11} + b_{12} \cdot B_{12} = 1 \cdot 4 + 2(-3) = -2$, que, obviamente, coincide com a definição já vista para determinantes de ordem 2.

B. 6 - Teorema de Laplace

Enunciado: o determinante de uma matriz $A \in M_n$ é igual à soma dos produtos dos elementos de uma **fila** (linha ou coluna) **qualquer** pelos seus respectivos cofatores.

Observações:

1ª) A demonstração deste teorema é feita usando-se o princípio da indução finita (PIF).

2ª) O teorema de Laplace nos permite escolher a linha ou a coluna mais conveniente para o cálculo do determinante. Evidentemente, aquela fila que tiver maior número de zeros será a mais conveniente.

Exemplo:

Para calcularmos $\det A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ é mais prático e rápido desenvolvê-lo (calculá-lo) seguindo a sua 3ª coluna, isto é:

$\det A = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$, ou seja:

$\det A = 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33}$

$$\det A = 1 \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -14$$

B. 7 - Regra de Sarrus

(regra prática para o cálculo de um determinante de 3ª ordem).

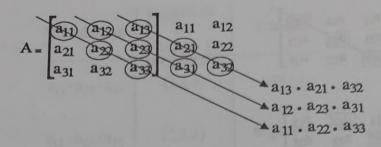
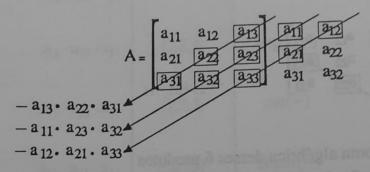
Observação: é importante salientar que esta regra não é válida para o cálculo de determinantes de ordem $n \neq 3$.

Dada a matriz:

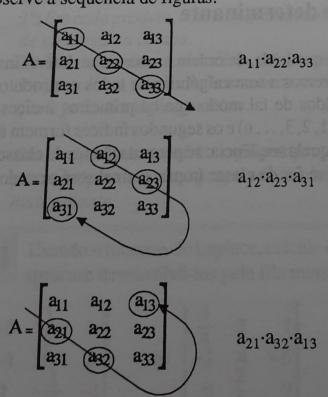
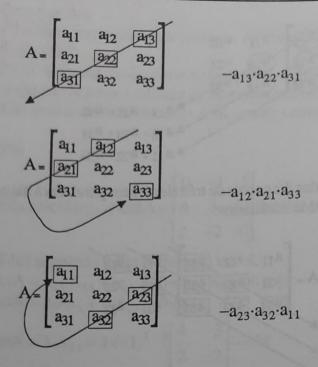
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, para calcular detA, usando a regra de Sarrus, procedemos do seguinte modo:

1º) Copiamos do lado direito de A a 1ª e a 2ª colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2º) Efetuamos os produtos das diagonais de três elementos paralelas à diagonal principal:

3º) Efetuamos os produtos das diagonais de três elementos paralelas à diagonal secundária e trocamos os sinais dos resultados:

4º) O detA é igual à soma algébrica desses 6 produtos obtidos:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

A regra de Sarrus pode, entretanto, ser aplicada de outra maneira (mais ágil). Observe a seqüência de figuras:

detA = soma algébrica desses 6 produtos

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

É fácil observar que o resultado da aplicação da regra de Sarrus é o mesmo obtido quando aplicamos a definição vista para determinantes de ordem $n \geq 2$.

B. 8 - Outra definição de determinante

Definição: Dada a matriz A, quadrada, de ordem n, chama-se **determinante de A** ao número obtido quando fazemos a soma algébrica de todos os produtos de n elementos dessa matriz, escolhidos de tal modo que os primeiros índices dos elementos a_{ij} formem a seqüência $(1, 2, 3, \ldots n)$ e os segundos índices formem todas as outras permutações possíveis daquela seqüência: se permutação for de classe par, o sinal do produto ficará mantido; se for de classe ímpar, o sinal será trocado.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Produtos	Seqüência do índice j	Classe
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	(1,2,3)	par(+)
$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	(1,3,2)	ímpar(−)
$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	(3,1,2)	par(+)
$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	(3,2,1)	ímpar(−)
$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	(2,3,1)	par(+)
$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	(2,1,3)	ímpar(−)

Portanto:

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Observações:

1ª) Em cada produto, nunca aparecem dois elementos de uma mesma linha ou de uma mesma coluna.

2ª) Um determinante de ordem n é a soma algébrica de $P_n = n!$ produtos.

3ª) Neste livro, não trabalharemos com esta definição por ser menos didática que a primeira definição vista.

Observação: nos exercícios seguintes, pretendemos que o leitor vá descobrindo, por si próprio, algumas propriedades dos determinantes que iremos estudar mais adiante.

164 Usando o teorema de Laplace, calcule o valor dos seguintes determinantes (procure desenvolvê-los pela fila mais conveniente):

a) $\begin{vmatrix} -3 & \frac{1}{2} & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -6 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -10 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & 12 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -2 & \frac{1}{2} & 4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 8 & -7 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & 3 & 0 \\ -7 & -8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} a & e & f & g \\ 0 & b & h & i \\ 0 & 0 & c & j \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

165 Dada a matriz

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e usando a regra de Sarrus, calcule:

a) detA
b) $\det(A^t)$ (matriz transposta de A)
c) o determinante da matriz B, que se obtém de A multiplicando sua 1ª coluna por 3.
d) o determinante da matriz C, que se obtém de A multiplicando sua 3ª linha por 4.
e) det(3A)
f) o determinante da matriz D, que se obtém de A trocando, entre si, as posições da 2ª e 3ª colunas.

166 Sendo

$B = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ e A a mesma matriz dada no exercício anterior, calcule:

a) A·B b) det (AB) c) detA d) detB

167 Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ calcule:}$$

a) detA b) det(5A) c) det(–3A) d) $\det(A^t)$

168 Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ calcule:}$$

a) detA
b) o determinante da matriz B, que se obtém de A multiplicando sua 2ª linha por 2.
c) o determinante da matriz C, que se obtém de A multiplicando suas 2ª e 3ª linhas por 2.
d) det (2A)

169 Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 0 \\ -5 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \text{ calcule:}$$

a) detA
b) o determinante da matriz B, que se obtém de A multiplicando a sua 3ª coluna por (–3).
c) det(–3A)

170 Calcular o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Observação: Lembre-se sempre de aplicar o teorema de Laplace na fila mais conveniente (com o maior número de zeros).

C - Propriedades dos Determinantes

As propriedades que veremos a seguir são válidas para determinantes de ordem n, qualquer que seja $n \in N^*$.

Ao dar exemplos ou propor exercícios, entretanto, usaremos, na maior parte das vezes, determinantes de ordem 3, porque estes proporcionam casos significativos e porque determinantes de ordem $n \geq 4$ são, geralmente, trabalhosos para se calcular.

P. 1 FILA NULA

"O determinante de uma matriz que tem uma fila nula (linha ou coluna) vale zero."

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 0$$

Observação: a demonstração desta propriedade se faz desenvolvendo o determinante pela fila nula (teorema de Laplace).

P. 2 Determinante da Matriz Transposta

"Sendo A e A^t matrizes de ordem n, temos $\det A = \det(A^t)$".

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -10$$

$$A^t = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(A^t\right) = -10$$

Observações:

1ª) Para demonstrar esta propriedade, usa-se o princípio da indução finita.

2ª) A partir desta propriedade podemos concluir que qualquer propriedade válida para as linhas são também válidas para as colunas (e vice-versa).

P. 3 Troca de Filas Paralelas

"Quando trocamos entre si as posições de duas filas paralelas de uma matriz de ordem n ($n \geq 2$), o valor do seu determinante troca de sinal. "

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -10$$

Em A, trocando entre si as linhas L_1 e L_3, temos:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 10 = -\det A$$

Em B, trocando entre si as colunas C_2 e C_3, temos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det C = -10 = -\det B$$

Observação: demonstra-se esta propriedade utilizando-se o princípio da indução finita.

P. 4 Filas Paralelas Iguais

"O determinante de uma matriz que tem duas filas paralelas iguais vale zero".

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -3 & 8 & -3 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 0$$

Observação: para demonstrar esta propriedade, trocamos, entre si, a posição das duas filas paralelas iguais e usamos a propriedade P.3.

P. 5 Filas Paralelas Proporcionais

"O determinante de uma matriz que tem duas filas paralelas proporcionais vale zero."

Exemplos

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 12 & 1 \end{bmatrix} \overset{C_2=3\cdot C_1}{\Longrightarrow} \det A = 0$$

$$B=\begin{bmatrix} 6 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_1=(-2)\cdot L_3}{\Longrightarrow} \det B = 0$$

Observação: usam-se as propriedades P.3 e P.6, que veremos a seguir, para demonstrar a propriedade P.5.

P. 6 Fila Multiplicada por α, $\alpha \in R$

"Quando multiplicamos uma fila de uma matriz A por α, $\alpha \in R$, o valor do determinante de A fica multiplicado por α."

Exemplos:

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -10$$

Multiplicando L_1, de A, por 2, obtemos:

$$B=\begin{bmatrix} -6 & 2 & 14 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = -20 = 2\det A$$

Multiplicando C_2, de A, por (-3), obtemos:

$$C=\begin{bmatrix} -3 & -3 & 7 \\ 4 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det C = 30 = (-3)\cdot \det A$$

Observações:

1ª) Demonstra-se esta propriedade desenvolvendo detB pela fila que foi previamente multiplicada por α.

2ª) Se multiplicarmos uma fila de A por α e, a seguir, outra fila por β, então detA fica multiplicado por α–β (α, β ∈R).

3ª) Se A é uma matriz de ordem n, então $det(\alpha A) = \alpha^n \cdot detA$*, pois para obter αA multiplicamos por α, α ∈R, as n linhas de A.*

4ª) É importante notar a diferença entre multiplicar-se uma matriz ou um determinante por α ∈R. Observe:

$$\text{Dada a matriz: } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$\text{temos: } \begin{vmatrix} aa & ab & ac \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha \cdot detA$$

e, por outro lado, temos:

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h & \alpha i \end{bmatrix} \Rightarrow det(\alpha A) = \alpha^3 \cdot detA$$

P. 7 Determinante de uma Matriz Triangular

"O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal. "

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (-1) \cdot 3 \cdot 5 = -15$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot 4 = 24$$

Observações:

1ª) Demonstra-se esta propriedade por indução finita sobre n (ordem da matriz).

2ª) Embora não seja matriz triangular, abordaremos o caso de determinantes de matrizes que tenham todos os elementos nulos, acima (ou abaixo) da diagonal secundária, na forma de exercício.

3ª) Como conseqüência desta propriedade, obtemos $det(I_n) = 1$ (matriz identidade).

P. 8 Determinante do Produto de Matrizes (Teorema de Binet)

"Sendo A e B matrizes de ordem n, temos:

$$\det(AB) = \det A \cdot B. "$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = -2$$

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & 22 \\ -12 & 38 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(AB) = (-7)\cdot 38 - 22\cdot(-12) = -2$$

Portanto, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Observações:

1ª) Embora o produto de matrizes não seja comutativo, temos:
$det(AB) = detA \cdot detB = detB \cdot detA = det(BA)$.

2ª) Se A é uma matriz inversível, temos:
$A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow detA \cdot det(A^{-1}) = 1$.

P. 9 Adição de Determinantes

Observando a soma de determinantes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\det A} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{1} & b_{2} & b_{3} & \cdots & b_{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\det B} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 & \cdots & a_n+b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\det C}$$

detC = detA + detB, verificamos que todas as linhas de A e B são idênticas,, com exceção das de ordem i. Com relação ao detC, que é a soma dos determinantes de A e B, verificamos que sua i-ésima linha é a soma das i-ésimas linhas de A, e B e as demais linhas ficam mantidas.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \\ 0-1 & 2-2 & 3+4 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -109$

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & a^2 \\ 1 & y & b^2 \\ 1 & z & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+x & a^2 \\ 1 & b+y & b^2 \\ 1 & c+z & c^2 \end{vmatrix}$

Observação: para demonstrar esta propriedade, basta desenvolver os determinantes (teorema de Laplace) pelas filas que devem ser somadas.

P. 10 Teorema de Jacobi

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, n≥2, enunciamos:

"O valor de um determinante não se altera quando adicionamos uma fila qualquer, multiplicada por $\alpha \in R$, a uma outra fila paralela a ela. "

Exemplos:

a) sendo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

façamos: $L_1 \cdot (-2) \xrightarrow{+} L_2$ (isto significa multiplicar a 1ª linha por (−2) e somar o resultado à 2ª linha). Observe:

$$L_1 = (2,-1) \qquad \Rightarrow L_1 \cdot (-2) = (-4,2)$$

$$L_2 = (3,5) \quad \downarrow +$$

A nova 2ª linha será: $(L_2)' = (-1,7)$

e a outra linha permanece inalterada. Teremos, portanto:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Calculando os valores desses determinantes, teremos:
$\det A = \det B = 13$
(o valor do determinante não se altera)

b) sendo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

façamos: $C_2 \cdot (3) \xrightarrow{+} C_1$ (2ª coluna multiplicada por 3 e o resultado somado à 1ª coluna). Observe:

$$C_1 = (1, 4, -1) \qquad \Rightarrow C_2 \cdot (3) = (3, 12, -3)$$

$$C_1 = (0, -1, 3) \quad \downarrow +$$

A nova 1ª coluna será: $(C_1)' = (3, 11, 0)$

e as demais colunas (2ª e 3ª) permanecem inalteradas. Obtemos, assim, a matriz:

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 11 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e, desenvolvendo esses determinantes, teremos:

$\det A = \det B = 27.$

Observações:
1ª) Usam-se as propriedades P.9 e P.5 para demonstrar o teorema de Jacobi.
2ª) Este teorema é de grande utilidade, pois, usando-o, podemos fazer surgir zeros numa determinada fila do determinante, o quê faz com que seu cálculo fique simplificado.
3ª) Seu enunciado pode ser ampliado da seguinte forma:
"O valor de um determinante não se altera quando somamos a uma fila

qualquer uma combinação linear das demais filas paralelas a ela." (*combinação linear de filas paralelas é a soma dessas filas, previamente multiplicadas por constantes reais quaisquer*).

No exemplo seguinte, somaremos à 4ª linha uma combinação linear das demais linhas:

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

façamos, como exemplo,

$$\underbrace{L_1.(2)+L_2.(-3)+L_3.(1)}_{\text{Combinação Linear das linhas (1), (2) e (3)}} \xrightarrow{+} L_4$$

$$L_1=(-4,1,-3,2) \quad \Rightarrow \quad L_1\cdot(2)=(-8,2,-6,4)$$
$$L_2=(3,0,2,-1) \quad \Rightarrow \quad L_2\cdot(-3)=(-9,0,-6,3)$$
$$L_3=(6,-5,1,3) \quad \Rightarrow \quad L_3\cdot(1)=(6,-5,1,3) \quad \downarrow +$$
$$L_4=(1,-2,5,0)$$

a nova 4ª linha será $(L_4)'=(-10,-5,-6,10)$

Obteremos, portanto: $B=\begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & -5 & 1 & 3 \\ -10 & -5 & -6 & 10 \end{bmatrix}$

e, efetuando os cálculos, concluímos:

detA = det(B) = 115

(Note que as linhas que foram usadas na combinação linear (1ª, 2ª e 3ª) permanecem inalteradas).

4ª) Conseqüências de teorema de Jacobi:

a) Teorema 1

"Se numa matriz A, quadrada e de ordem n, uma fila é igual a uma combinação linear das outras filas paralelas a ela, então detA = 0".

Exemplo: observando a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ *podemos notar que a 3ª coluna*

é combinação linear das demais, ou seja, $C_1 \cdot (1) + C_2 \cdot (2) = C_3$. Calculando o determinante dessa matriz, temos: $\det A = 0$ (verifique!).

b) ***Teorema 2*** *(Recíproco do Teorema 1)*
"Se uma matriz A, quadrada e de ordem n, é tal que $\det A = 0$, então existe uma fila de A que é igual a uma combinação linear das demais filas paralelas a ela".

P. 11 Determinante da Matriz de Vandermonde (Matriz das Potências)

Chama-se matriz de Vandermonde a toda matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ da forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ (\alpha_1)^2 & (\alpha_2)^2 & (\alpha_3)^2 & \dots & (\alpha_n)^2 \\ (\alpha_1)^3 & (\alpha_2)^3 & (\alpha_3)^3 & \dots & (\alpha_n)^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_1)^{n-1} & (\alpha_2)^{n-1} & (\alpha_3)^{n-1} & \dots & (\alpha_n)^{n-1} \end{bmatrix}$$

A sua 2ª linha $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$ chama-se "linha característica" da matriz de Vandermonde e, por isso, costumamos indicar o valor do seu determinante usando a notação $\det A = V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$

Cálculo do determinante da matriz de Vandermonde

Demonstra-se por indução que $\det A = V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$
$= (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (\alpha_3 - \alpha_2) \cdot (\alpha_3 - \alpha_1) \cdot (\alpha_4 - \alpha_3) \cdot (\alpha_4 - \alpha_2) . (\alpha_4 - \alpha_1) \cdot \dots$
$\cdot (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \cdot (\alpha_n - \alpha_{n-2}) \cdot (\alpha_n - \alpha_{n-3}) \cdot \dots (\alpha_n - \alpha_1)$

Observações:
1ª) A 1ª linha da matriz de Vandermonde é formada por potências de expoente zero $((\alpha_1)^0, (\alpha_2)^0, (\alpha_3)^0, \dots, (\alpha_n)^0)$ dos elementos da linha característica.
2ª) As colunas dessa matriz $(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$ são progressões geométricas com primeiro termo $\alpha_1 = 1$, razão $q = \alpha$ e número de termos $= n$.
3ª) A matriz transposta de A também é chamada de matriz de Vandermonde. Observe:
4ª) O cálculo do detA se faz multiplicando todos os termos da forma $(\alpha_i - \alpha_j)$ com $i > j$, sendo α_i e α_j elementos da fila característica da matriz de Vandermonde.

Exemplos:

a) Dada a matriz de Vandermonde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix},$$

sua fila característica é (1, 2, 3, 4) e calculamos

$\det A = (2-1)\cdot(3-2)\cdot(3-1)\cdot(4-3)\cdot(4-2)\cdot(4-1) =$
$= 1\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3 = 12 = V(1, 2, 3, 4)$

b) na matriz de Vandermonde:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix},$$ a fila característica é (a, b, c) e, portanto,

$\det B = V(a, b, c) = (b - a)\cdot(c - b)\cdot(c - a)$

P. 12 Regra de Chió

Esta é uma regra prática que serve para abaixar de n para (n–1) a ordem de um determinante.

Para poder aplicar a regra de Chió, é necessário que o elemento a_{11} da matriz seja igual a 1. Quando não o for, podemos facilmente transformá-lo em 1, usando propriedades convenientes dos determinantes.

Com o objetivo de facilitar o entendimento desta regra pelo leitor, o enunciado (em etapas) será acompanhado da resolução de um exemplo.

1ª Etapa

"Verificamos se o elemento a_{11} do determinante vale 1. Caso não valha, usando propriedades convenientes, tornamos $(a_{11})' = 1$."

Exemplo:

Aplicaremos a regra de Chió no cálculo do determinante de uma matriz A de ordem n = 4:

$$\det A = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 7 & 17 \\ 4 & 9 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com o objetivo de obter $(a_{11})' = 1$, usamos o teorema de Jacobi (P. 10), fazendo:

$L_3 = (-2) \xrightarrow{+} L_1$:

$L_3 = (3, 5, 3, 7) \quad \Rightarrow \quad L_3 \cdot (-2) = (-6, -10, -6, -14)$

$L_1 = (7, 12, 7, 17)$

A nova 1ª linha será : $(L_1)' = (1, 2, 1, 3)$

e as demais permanecem inalteradas:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2ª Etapa

"Separamos a 1ª linha e a 1ª coluna de A, isolando, conseqüentemente, uma sub-matriz de A com ordem (n–1) (que no exemplo é de ordem 3). "

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

3ª Etapa

"Escrevemos um novo determinante de ordem (n–1), cujos elementos são da forma (a–b.c) obtidos como mostra o esquema.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & b \\ \vdots & & \uparrow \\ c & \leftarrow & a \end{vmatrix}$$

Esse novo determinante, de ordem (n–1), é igual ao detA.

No nosso exemplo, teremos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 9-2.4 & 6-1.4 & 12-3.4 \\ 5-2.3 & 3-1.3 & 7-3.3 \\ 6-2.5 & 0-1.5 & -1-3.5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & -16 \end{vmatrix}$$

Se quisermos, podemos aplicar novamente a regra de Chió a este último determinante, abaixando a sua ordem para n = 2. Observe:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0-2.(-1) & -2-0.(-1) \\ -5-2.(-4) & -16-0.(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -16 \end{vmatrix} \text{ e, portanto,}$$

$\det A = -32 + 6 = -26$

Observações:

1ª) Como podemos notar, a regra de Chió é muito prática para abaixarmos a ordem de um determinante, o quê, obviamente, torna o seu cálculo mais simples.

2ª) Para demonstrar esta propriedade, usamos os teoremas de Jacobi e de Laplace.

P. 13 Teorema de Cauchy

"Numa matriz A, quadrada e de ordem $n \geq 2$, a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos cofatores dos elementos de qualquer fila paralela a ela (ordenadamente) é igual a zero. "

Exemplo:

Na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ temos:}$$

$L_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{23}) = (2, -1, 0)$.

O cofatores dos elementos da 2ª linha são:

$$A_{21} = (-1)^3 . \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = (-1)^4 . \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{23} = (-1)^5 . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Portanto:

$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 1 = 0$

o que verifica o teorema de Cauchy.

Observações:

1ª) Apesar deste teorema não apresentar interesse para resolução de exercícios, é usado na demonstração do teorema que trata da matriz inversa de A.

2ª) Usam-se o teorema de Laplace e a propriedade P. 4 para demonstrar o teorema de Cauchy.

171 Usando as propriedades P.2, P.3 e P.6 e sabendo que

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = a,$$

determine, em função de a, os valores dos seguintes determinantes:

a) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\det C = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\det E = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 0 & -8 \\ 5 & -15 & -12 \end{vmatrix}$ e) $\det F = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\det(2A)$

172 Observando o modelo do item (a), coloque em evidência o maior número natural possível na fila indicada, de modo que resultem somente números inteiros no novo determinante:

a) 1ª linha $\begin{vmatrix} 12 & 18 & 30 \\ -3 & 7 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

b) 2ª coluna $\begin{vmatrix} 2 & 24 & 5 \\ -3 & 56 & 1 \\ -5 & -8 & -2 \end{vmatrix}$

c) 3ª linha $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \\ -60 & -12 & -24 \end{vmatrix}$

d) Escolha a fila conveniente $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 70 \\ -3 & 7 & 14 \\ -5 & -1 & -28 \end{vmatrix}$

173 Dada a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2a & 6b & -8c \\ d & 9e & f \\ g & 15h & i \end{bmatrix}$$

e sabendo que $\det A=\alpha$, determine, em função de α, o valor dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & 3b & -4c \\ d & 9e & f \\ g & 15h & i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & -8c \\ d & 3e & f \\ g & 5h & i \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & -4c \\ d & 3e & f \\ g & 5h & i \end{vmatrix}$

174 Sabendo que

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha$$

determine, em função de α, o valor do determinante

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

175 Sendo det$A=\alpha$ o determinante do exercício anterior, calcule, em função de α, o valor do determinante:

$$\det C = \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ . & . & . & . \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

176 Todos os determinantes seguintes são iguais a zero. Escreva, em cada caso, a propriedade que se usa para justificar esse valor:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -6 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ -9 & 7 & -6 \\ -15 & -1 & -10 \end{vmatrix}$

177 Calcule os determinantes das seguintes matrizes triangulares:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

178 Calcule o valor dos seguintes determinantes, usando o teorema de Laplace:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & d \\ c & e & f \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} d & e & a \\ f & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & e \\ 0 & c & f & g \\ d & h & i & j \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & a \\ 3 & 5 & 6 & b & 0 \\ 2 & 7 & c & 0 & 0 \\ 4 & d & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

179 Calcule o valor do determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & . & . & . & . & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sugestão: utilize o resultado obtido no exercício 175

180 Sabendo que A e B são duas matrizes quadradas de ordem 4 e que detA=3 e detB=-5, calcule:

a) det(AB) b) det(2B) c) $\det(A^2)$
d) $\det(B^t)$ e) $\det(A^{-1})$ f) $\det(B^4)$

181 Calcule detA, sabendo que A é uma matriz não singular (detA≠0) e ortogonal.

182 Sabendo que A é uma matriz quadrada de ordem n e que $A^3=A$, calcule detA.

183 A é uma matriz quadrada de ordem n, n ímpar. Sabendo, também, que A é uma matriz anti-simétrica, calcule detA.

184 Calcule a soma

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

Sugestão: use a propriedade P.9.

185 Sabendo que c·d=6, calcule o valor da seguinte subtração de determinantes

$$\begin{vmatrix} 2 & a & b \\ 3 & c & 1 \\ 5 & 1 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 3 & c & 1 \\ 5 & 1 & d \end{vmatrix}$$

Sugestão: use as propriedades: P.6, P.9 e, a seguir, desenvolva o resultado pela 1ª coluna (Laplace).

186 Efetue a soma:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -8 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Sugestão: use as propriedades P.2 e P.9.

187 Efetue a soma:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Sugestão: use as propriedades P.3 e P.9.

188 Efetue a soma:

$$2.\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & -14 & 12 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -8 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Sugestão: use as propriedades P.6, P.2, P.3 e P.9.

189 Sabendo que

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ y & 0 & z \end{vmatrix} = 4,$$ calcule o valor da soma:

$$\begin{vmatrix} 3x & 5 & 6y \\ 5 & -6 & 0 \\ -2 & -9 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2 & 5 \\ -20 & 9 & -6 \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$$

(det B) (det C)

190 Sabendo que

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & x & -2 \\ y & 1 & 0 \\ -4 & z & 7 \end{vmatrix} = a, \text{ calcule } \det B = \begin{vmatrix} 3 & x & -2 \\ 2y+3 & 2+x & -2 \\ -4 & z & 7 \end{vmatrix}$$

Sugestão: decomponha detB numa soma de determinantes conveniente.

191 Dado o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix},$$ pede-se:

a) Usando o teorema de Jacobi, efetue: $C_1.(-2) \xrightarrow{+} C_2$ e a seguir, $C_1.(-3) \xrightarrow{+} C_3$

b) Usando o teorema de Laplace, desenvolva o novo determinante pela 1ª linha e calcule seu valor.

192 Usando "Jacobi" e, a seguir, "Laplace", calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ -1 & -4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

193 Calcule o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

do modo que se sugere a seguir:

a) Use o teorema de Jacobi: $C_1.(-1) \xrightarrow{+} C_2$ e $C_1(-1) \xrightarrow{+} C_3$

b) Coloque em evidência (b-a) na 2ª coluna e (c-a) na 3ª coluna.

c) Desenvolva, usando Laplace, e calcule o determinante de ordem 2 obtido.

194 Repetindo o procedimento do exercício anterior, calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

195 Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$$, do modo que se sugere a seguir:

a) Use o teorema de Jacobi: $C_2 \cdot (1) \xrightarrow{+} C_3$

b) Coloque (x+y+z) em evidência (P.6).

c) Dê o valor do determinante obtido, usando ,agora, a propriedade que você acha conveniente.

196 Usando o teorema de Jacobi, calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+c & a \\ a & a & a & a+d \end{vmatrix}$$

Sugestão: $C_1.(-1) \xrightarrow{+} C_2,\ C_1.(-1) \xrightarrow{+} C_3,\ C_1.(-1) \xrightarrow{+} C_4$

197 Escreva as filas características e, a seguir, calcule os valores dos determinantes das seguintes matrizes de Vandermonde:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 25 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 125 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}$

198 Calcule os valores dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 8 & 27 & 16 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & a^4 \\ b^2 & b^3 & b^4 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix}$

Sugestão: coloque em evidência os fatores comuns nas filas convenientes.

199 Usando a regra de Chió, calcule o valor dos seguintes determinantes: (observe que já temos $a_{11}=1$ em todos os itens deste exercício)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 & 7 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

200 Use a propriedade conveniente (P.3, P.6 ou P.10) para tornar $a_{11}=1$ e, a seguir, calcule os valores dos determinantes seguintes, usando a regra de Chió:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -8 & 6 & -3 \\ 7 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 8 & 8 & 17 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 9 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \end{vmatrix}$

201 Calcule o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \text{ usando:}$$

a) Regra de Sarrus   b) Regra de Chió

A seguir, compare os dois procedimentos e escolha qual é, na sua opinião, o mais prático.

202 Usando a propriedade P.6 e, a seguir, a regra de Chió, mostra que

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & a & a & a \\ 6 & a & b & b \\ 6 & a & b & c \end{vmatrix} = 6(a-6)(b-a)(c-b)$$

D- Matriz Inversa (A^{-1})

Mostramos, neste item, um método para determinar a matriz inversa (quando existir) de uma matriz A, quadrada e de ordem n≥2. Lembremos que, por definição, temos: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

D.1 - Matriz dos Cofatores (A')

"Dada uma matriz A, quadrada e de ordem n (n≥2), chama-se de **matriz dos cofatores de A** (indicaremos A') à matriz que se obtém substituindo cada elemento de A pelo seu respectivo cofator (complemento algébrico)."

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

D.2 - Matriz Adjunta de A (A*)

Definição:

"Chama-se de **matriz adjunta de A** (indica-se A*) à transposta da matriz dos

cofatores de A."

$$A^*=(A')^t$$

Exemplo:

Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

calculemos A*, matriz adjunta de A, começando pela determinação dos seus cofatores:

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3$ $\qquad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=7$

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-15$ $\qquad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$

$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=2$ $\qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-5$

$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1$ $\qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-2$

$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=4$

temos, portanto: $A'=\begin{bmatrix} 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -2 \\ -15 & -5 & 4 \end{bmatrix}=\left(A'\right)^t$

matriz adjunta de A.

D.3 - Determinação da Matriz Inversa de A

Teorema 1

"Sendo A uma matriz quadrada de ordem n e A* sua matriz adjunta, temos: $A \cdot A^*=A^* \cdot A=\det A \cdot I_n$.

Demonstração:

Efetuando o produto $A \cdot A^*=B=[b_{ik}]_{n\times n}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{jk}$

Pelos teoremas de Laplace e de Cauchy, teremos:

$$A\,A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}$$

e, portanto, $A \cdot A^* = \det A \cdot I_n$ (c.q.d)

Analogamente, demonstra-se que $A^*.A = \det A \cdot I_n$

Teorema 2

"Uma matriz quadrada A de ordem n é inversível, se, e somente se, $\det A \neq 0$."

1ª Parte:

Hipótese: a matriz A é inversível.

Tese: $\det A \neq 0$

Demonstração:

Se A é inversível, então existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$

Pelo teorema de Binet, temos: $\text{Det}\,(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n)$

$\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$. Como o produto dos números detA e det(A) é diferente de zero, então nenhum deles é igual a zero e, portanto, $\det A \neq 0$. c.q.d.

2ª Parte:

Hipótese: $\det A \neq 0$

Tese: A matriz A é inversível.

Demonstração:

Pelo teorema 1 sabemos que $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A \cdot I_n$

e como $\det A \neq 0$, vamos dividir os membros dessa igualdade por detA:

$$\frac{A.\,A^*}{\det A} = \frac{A^*.\,A}{\det A} = \frac{\det A.\ I_n}{\det A}$$

$$A\left(\frac{A^*}{\det A}\right) = \left(\frac{A^*}{\det A}\right).A = I_n;$$

fazendo $\frac{1}{\det A} \cdot A^* = B$, temos:

$A \cdot B = B \cdot A = I_n$ e, pela definição de matriz inversa, concluímos que B é a matriz inversa de A, portanto $B = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

Portanto existe A^{-1}, matriz inversa de A, ou seja, A é inversível. c.q.d.

A partir dos dois teoremas anteriores, concluímos a seguinte expressão:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \quad \text{para } \det A \neq 0$$

Observações:

1ª) Como já vimos no 1º capítulo, se detA=0, a matriz A é chamada de matriz singular e não é inversível.

2ª) Se detA≠0, a matriz A é inversível e chamada de não singular.

Exemplos:

a) Calculemos a matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Começamos determinando A* (matriz adjunta de A) e detA:

$$A^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -2 \\ -15 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$ (ver página 91)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C_2 \cdot (1) \xrightarrow{+} C_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Chió} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Finalmente, temos:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} . A^* = \frac{1}{-1} . \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -2 \\ -15 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \\ 15 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Observação: é fácil verificar que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$

b) Vamos, agora, determinar a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sabendo que

ad-bc≠0.

$$A_{11} = (-1)^2 . | d | = d$$

$$A_{12} = (-1)^3 . | c | = -c$$

$$A_{21} = (-1)^3 . | b | = -b$$

$$A_{22} = (-1)^4 . | a | = a$$

$$A' = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Assim sendo, temos:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} . A^* = \frac{1}{ad - bc} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Resultado este que foi visto no 1º capítulo deste livro.

203 Consiserando os dois teoremas sobre matriz inversa, determine $X \in \mathbf{R}$, em cada caso, de modo que a matriz A seja singular, isto é, não admita inversa:

a) $A=\begin{bmatrix} x & 3 \\ x & x \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} x & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} x & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & x & -8 \\ 2 & 17 & x \end{bmatrix}$

204 Determine, em cada caso, $X \in \mathbf{R}$ de modo que a matriz A saja inversível:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} x & 3 & x \\ 3 & x & x \\ x & x & 3 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & x \\ 1 & 4 & 0 & x^2 \\ 1 & 8 & 0 & x^3 \end{bmatrix}$ e) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ax & bx & ab \\ a+x & b+x & a+b \end{bmatrix}$ sendo $a,b \in \mathbf{R} \mid a \neq b$.

205 Usando a teoria vista, determine a matriz inversa de A nos seguintes casos:

a) $A=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ e) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ f) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

206 O seguinte teorema: "Se uma seqüência de transformações elementares transforma uma matriz A, quadrada de ordem n, na matriz unidade I_n, então essa seqüência de transformações elementares transforma a matriz unidade I_n na matriz A^{-1} inversa de A", nos permite também achar a inversa de A. Olhe o exemplo:

Achemos a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Para isto vamos considerar uma matriz formada por A e I_3 e aplicamos sucessivamente as transformações elementares sobre as linhas dessa matriz de modo que A se reduza à matriz unidade I_3, se possível. Desta forma, I_3 se transformará em A^{-1}. Vejamos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \xrightarrow{+} L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -1(L_1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2(L_1) \xrightarrow{+} L_2 \\ -3(L_1) \xrightarrow{+} L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] L_2 \xrightarrow{+} L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right] -1(L_3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -6 \end{array}\right] 2L_3 \xrightarrow{+} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -6 \end{array}\right]$$

Como, através de transformações elemetares, A se transformou na matriz unidade,

A é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -8 & -1 & -10 \\ -5 & -1 & -6 \end{bmatrix}$

Baseando-se nesse exemplo, ache a inversa de A nos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

207 Resolvendo as equações matriciais:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} . X \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} . X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} . X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 \end{bmatrix}$

208 Reslova as seguintes equações

a) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7$ b) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 7 \\ x-4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 2 & x+2 \end{vmatrix} = 7$

d) $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ x-4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x$ e) $\begin{vmatrix} -1 & x+1 & x-1 \\ x+2 & -1 & 1 \\ 2x-4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -22$

f) $\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & 1 \\ x & 2x-5 & 0 \\ 1 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = -6$

209 Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2a & 5b-c & 7c \\ 2x & 5y-z & 7z \\ 2v & 5s-t & 7t \end{bmatrix}$ ache uma relação entre detA e detB.

210 Dados

$\alpha = \begin{vmatrix} 2x & -3y & -1 \\ 3a & b & 2 \\ r & 2s & 1 \end{vmatrix}$ e $\beta = \begin{vmatrix} 4x-2 & -9y+3 & -7 \\ 6a+4 & 3b-6 & 14 \\ 2r+2 & 6s-3 & 7 \end{vmatrix}$, ache um relação entre α e β.

211 Mostre, sem desenvolver, que o determinante

$D = \begin{vmatrix} 29 & 0 & 11 & 25 \\ 19 & 31 & 21 & 5 \\ 31 & 43 & 37 & 15 \\ 17 & 17 & 71 & 10 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 5.

212 Lembrando que 969, 893 e 741 são múltiplo de 19, mostre, sem desenvolver, que o determinante

$D = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 8 & 9 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 19.

213 Mostre que

$D = \begin{vmatrix} 13 & 31 & 77 & 17 \\ 29 & 43 & 19 & 49 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 12.

214 Mostre, sem desenvolver que

$$D=\begin{vmatrix} 11 & 3 & 2 & 4 & 7 \\ 12 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 3 & 3 & 4 & 9 \\ 14 & 2 & 6 & 6 & 9 \\ 15 & 3 & 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \text{ é divisível por 17.}$$

215 Calcule os determinantes

a) $\begin{vmatrix} 13 & 15 & 0 \\ 27 & 21 & 0 \\ 31 & 43 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 17 & 43 & -91 \\ 43 & -17 & 91 \\ 17 & 43 & -91 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 111 & 2 & 4 & 6 \\ 301 & -1 & 7 & 6 \\ 191 & 4 & -1 & 3 \\ 311 & -6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 14 & 10 & 8 & 2 \\ -17 & 31 & 16 & 4 \\ 21 & 15 & 12 & 3 \\ 42 & 30 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

216 Determine D nos casos:

a) $D=\begin{vmatrix} -11 & 12 & -5 \\ 15 & 17 & 5 \\ 13 & 21 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -11 & 12 & -6 \\ 15 & 17 & 10 \\ 13 & 21 & 9 \end{vmatrix}$

b) $D=\begin{vmatrix} -11 & 53 & -11 \\ 21 & 35 & 19 \\ 37 & 17 & 53 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -11 & 21 & 37 \\ 53 & 35 & 17 \\ -11 & 23 & 21 \end{vmatrix}$

c) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -7 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & -5 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -7 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & -5 & 9 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 & -7 \\ 6 & 9 & -5 & 8 \end{vmatrix}$

217 Sem desenvolver os determinantes, mostre as seguintes indentidades:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-b)$

218 Aplicando os teoremas de Jacobi e Laplace, calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

219 Reduzindo à forma triangular, calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

220 Reduzindo à forma triangular, calcule os seguintes determinantes de ordem n.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ . & . & . & . & \dots & . \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

221 Demonstre a identidade:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}x & \cos x & 1 \\ \operatorname{sen}y & \cos y & 1 \\ \operatorname{sen}z & \cos z & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(z-x)+\operatorname{sen}(y-z)$$

222 Mostre que se

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos y \\ \cos x & 1 & \cos z \\ \cos y & \cos z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \cos y \\ \cos x & 0 & \cos z \\ \cos y & \cos z & 0 \end{vmatrix},$$

então $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$

223 Ache o coeficientes de x^3 do determinante

$$D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

224 Lembrando que $\det(A.A^t)=\det A.\det A^t=(\det A)^2$ calcule detA dado

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

225 Ache o determinante da matriz A, detA, nos casos:

a) $A=[5]$ b) $A=\left[-\frac{1}{2}\right]$ c) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 9\end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

e) $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ f) $A=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 0 & 7\end{bmatrix}$ g) $A=\begin{bmatrix}-3 & -3\\ 5 & 5\end{bmatrix}$

h) $A=\begin{bmatrix}\text{sen}a & \cos a\\ -\text{sen}a & \cos a\end{bmatrix}$ i) $A=\begin{bmatrix}a+b & a+b\\ a-b & a+b\end{bmatrix}$ j) $A=\begin{bmatrix}a+b & a^2+ab+b^2\\ a-b & a^2-ab+b^2\end{bmatrix}$

226 Calcule os determinantes

a) $\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}x & x-1\\ x+1 & x\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}x^3 & x^2+x+1\\ x-1 & 1\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}\sqrt{5}-1 & 3-2\sqrt{3}\\ 3+2\sqrt{3} & \sqrt{5}+1\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}\log_b a & \log_b c\\ 1 & 1\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}\log_b a & \log_b c\\ \log_c b & \log_d b\end{vmatrix}$

227 Dada a matriz

$A=\begin{bmatrix}3 & -7\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, ache os seguintes menores complementares dos elementos de A:

a) M_{11} b) M_{21} c) M_{12} d) M_{22}

228 Dada a matriz

$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -4 & 5\\ 1 & 2 & 7\end{bmatrix}$, ache os menores complementares dos seguintes elementos de A:

a) a_{11} b) a_{12} c) a_{21}
d) a_{23} e) a_{32} f) A_{33}

229 Dada a matriz

$A=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$, ache os cofatores (complementos algébricos) dos seguintes elementos da A:

a) a_{11} b) a_{21} c) a_{12} d) a_{22}

230 Dada a matriz

$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, ache os cofatores dos seguintes elementos de A:

a) a_{11} b) a_{12} c) a_{13} d) a_{21}
e) a_{32} f) a_{33} g) a_{22}

231 Ache os cofatores A_{24} e A_{32} dos elementos a_{24} e a_{32} da matriz $A=(a_{ij})_{4x4}$ definida por $a_{ij} = 2i - j^2$

232 Usando o teorema de Laplace, calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 8 \\ 0 & -7 & -9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -5 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

233 Resolva em R as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & x-5 \\ 2x & -x \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} x^2+2 & x^2-3 \\ x+3 & -5 \end{vmatrix} = -7$

c) $\begin{vmatrix} 1 & x+3 & x \\ 0 & 1 & 2 \\ 2x & x+4 & 1 \end{vmatrix} = -15$

d) $\begin{vmatrix} -x & x-1 & x-2 \\ x-1 & x & 0 \\ 3 & 4 & x-1 \end{vmatrix} = -5$

234 Se:

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$ e $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = E$, ache uma relação entre D e E.

235 Ache os seguintes determinantes

a) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -8 \\ 6 & 1 & -12 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 7 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \operatorname{sen}^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \operatorname{sen}^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & \cos 2x & \cos^2 x \\ \operatorname{sen}^2 y & \cos 2y & \cos^2 y \\ \operatorname{sen}^2 z & \cos 2z & \cos^2 z \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} x & x' & ax+by' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2+b^2 & ab \\ (x+y)^2 & x^2+y^2 & xy \\ (r+s)^2 & r^2+s^2 & rs \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & \operatorname{sen}(x+a) \\ \operatorname{sen} y & \cos y & \operatorname{sen}(y+a) \\ \operatorname{sen} z & \cos z & \operatorname{sen}(z+a) \end{vmatrix}$

236 Aplicando os teoremas de Jacobi e Laplace ache os determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

237 Demonstre as seguintes identidades

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-b)(c-a)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc\right)(b-a)(c-a)(c-b)$

238 Usando e regra de Chió, calcule os determinantes seguintes

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

239 Calcule os determinantes (Vandermonde)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 16 & 36 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & -12 & -18 & 24 \\ 3 & 12 & 27 & 48 \\ -1 & 8 & 27 & -64 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} b-a & c-b & c-a \\ ab-a^2 & bc-b^2 & c^2-ac \\ a^2b-a^3 & b^2c-b^3 & c^3-ac^2 \end{vmatrix}$

240 Calcule os determinantes de ordem n

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & n \\ 0 & 0 & 0 & . & . & n-1 & a \\ . & . & . & . & . & . & a \\ 0 & 2 & a & . & . & . & a \\ 1 & a & a & . & . & . & a \end{vmatrix}$

241 Reduzindo àd forma triangular, calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

242 Ache os determinantes

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$

243 Resolver em R as equações

a) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$

244 Ache a matriz inversa de A nos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

245 Usando o processo que transforma a matriz A em I_n e I_n em A^{-1}, visto no exercício 206, ache a matriz inversa da A nos casos:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$

246 Resolva as seguintes equações matriciais

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} . X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

247 Mostre, sem desenvolver, que o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 9 & 17 \\ 1 & 8 & 6 & 3 & 18 \\ 1 & 7 & 7 & 1 & 19 \\ 2 & 2 & 7 & 7 & 20 \\ 2 & 0 & 4 & 7 & 21 \end{vmatrix}$$ é divisível por 23.

248 Ache o coeficiente de x^3 do determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

249 Prova-se o seguinte teorema:
"Os pontos A (x_1,y_1), B (x_2,y_2) e C(x_3,y_3) são colineares se, e somente se,

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0\text{"}$$

Então determine o valor da incógnita nos casos, sabendo que A,B e C são colineares:
a) A(x,1), B(–2,3) e C(4,1)   b) A(–3,y), B(4,1) e C(3,3)

250 Ache os potnos dos eixos do plano cartesiano que estão na reta determinada pelos pontos A(3,-2) e B(12,4)

251 Prova-se o seguinte teorema:
"A área do triangulo cujos vértices são A (x_1,y_1), B (x_2,y_2) e C(x_3,y_3) é dada

$$\text{por } S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|\text{"}$$

Então ache a área do triangulo ABC nos casos:
a) A(–2,–4), B(0,6) e C(4,–2)   b) A(–1,5), B(–3-1) e C(4,2)

252 Determine x de modo que a área do triangulo ABC seja 6, dados A(x,1), B(3,–5) e C(–2,–4)

253 Determine o ponto C do eixo das ordenadas de modo que a área do triângulo ABC sejam dados A(2,–1) e B(4,1).

Exercícios Suplementares

254 Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}x & \cos x \\ \operatorname{sen}y & \cos y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen}x \\ \operatorname{sen}y & \cos y \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} \sec x & 1 \\ 1 & \sec x \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} \operatorname{cotg}x & -1 \\ 1 & \operatorname{cotg}x \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} \cos x+\cos y & \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y \\ \operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y & \cos y-\cos x \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 2\text{senx}\cos x & 2\text{sen}^2x-1 \\ 2\cos^2 x-1 & 2\text{senx}\cos x \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2} & \dfrac{2x}{1+x^2} \\ \dfrac{2x}{1+x^2} & -\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2} \end{vmatrix}$

255 Calcule os determinantes

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} \text{senx seny} & \text{senx}\cos y & \cos x \\ \cos x\,\text{seny} & \cos x\cos y & -\text{senx} \\ \cos y & -\text{seny} & 0 \end{vmatrix}$

256 Aplicando o teorema de Jacobi e depois o de Laplace, ache os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

257 Usando a regra de Chió, ache os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

258 Reduzido à forma triangular, calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1000 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0{,}1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0{,}1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 6 \end{vmatrix}$

259 Reduzindo à forma triangular, ache os determinantes de ordem n seguintes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ n & n & n & & n & n & n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & & a_2 - b_2 & \dots a_2 & \dots a_2 \\ . & \dots & . & \dots . & \dots . \\ a_n - b_n & & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$

260 Calcule o determinante da matriz $A = a_{ij(n \times n)}$ nos casos:

a) $a_{ij} = \text{mín}(i,j)$
b) $a_{ij} = \text{máx}(i,j)$
c) $a_{ij} = |i-j|$

261 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$

262 Sem desenvolver, cacule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{x+rx_2}{1+r} & \frac{y_1+ry_2}{1+r} & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$

263 Demonstre, sem desenvolver, a identidade

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

264 Demonstrar as identidades seguintes aplicando as propriedades e o teorema de Laplace.

a) $$\begin{vmatrix} \text{cox}\frac{x-y}{2} & \text{sen}\frac{x+y}{2} & \cos\frac{x+y}{2} \\ \cos\frac{y-z}{2} & \text{sen}\frac{y+z}{2} & \cos\frac{y+2}{2} \\ \cos\frac{z-x}{2} & \text{sen}\frac{z+x}{2} & \cos\frac{z+x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(y-x) + \text{sen}(z-y) + \text{sen}(x-z)\right]$$

b) $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

c) $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)}$$

d) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d$$

265 Resolver as seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-x^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-x^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$, com $a_1, a_2 \dots a_n$ distintos entre si.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$

266 Calcule os determinantes

a) $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 213 & 186 & 162 & 137 \\ 344 & 157 & 295 & 106 \\ 419 & 418 & 419 & 418 \\ 417 & 416 & 417 & 416 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

267 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & & 0 \\ 0 & -a & a & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & a \end{vmatrix}$

268 Calcule o determinante.

$$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

269 Demonstre a identidade

$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \operatorname{sen}(a+b) & \operatorname{sen}(b+c) & \operatorname{sen}(c+a) \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(a-b).\operatorname{sen}(a-c).\operatorname{sen}(b-c)$$

270 Calcule o determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & d & -c & f & -e & -h & g \\ -c & -d & a & b & g & h & -e & -f \\ -d & c & -b & a & h & -g & f & -e \\ e & -f & -g & -h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

271 Calcule:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

272 Ache a matriz A^{-1}, inversa de A, nos casos:

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{bmatrix}$

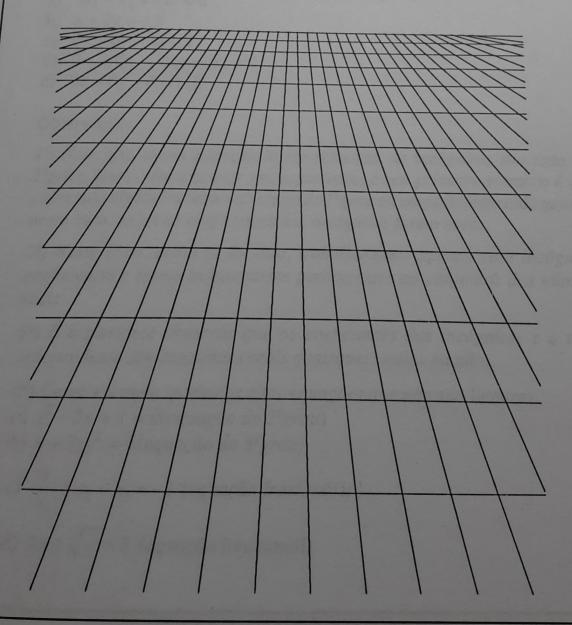
c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

273 Resolva as equações matriciais seguintes

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} . X \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$

b) $X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Sistemas Lineares

A - Introdução

Abordaremos, neste capítulo, alguma métodos para resolver ou discutir sistemas de **m** equações lineares a **n** incógnitas.

A.1 - Equação Linear

Definição:

"Chama-se **equação linear com n incógnitas** a toda equação redutível à forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas, $a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes das incógnitas e b é o termo independente (ou termo constante) das equação"

Exemplos:

a) $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$
b) $x + 2y = -3$
c) $0x + 0y - 4z = 0$
d) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$
e) $0x + 0y + 0z = 10$

Observações:

1ª) Note que, numa equação linear reduzida, as incógnitas são todas do 1ªgrau, isto é, têm expoente um e, portanto, o seu primeiro membro é uma expressão algébrica racional inteira do 1ªgrau ou um polinômio nulo quando, neste caso, todos os coeficientes das incógnitas forem nulos.

2ª) Neste livro, como já foi dito, trabalharemos apenas com incógnitas, coeficientes e termo independente pertencentes ao conjuntos dos números reais.

3ª) É importante observar que os coeficientes das incógnitas e o termo independente são constantes reais quaisquer: nulas ou não.

4ª) Como exemplo, podemos citar equações que não são lineares:
a) $x^2 - 5x + 4 = 0$ *(equação do 2ªgrau)*
b) $x + 2xy^2 = 3$ *(equação do 3ªgrau)*

c) $\frac{1}{x_1} + x_2 + x_3 = -1$ *(equação fracionária)*

d) $2x + \sqrt{y} = 3$ *(equação irracional)*

5ª) Muitas vezes, ao invés de chamarmos as incógnitas de x, y, z, w, etc., usamos escrever $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ porque esta notação facilita a generalização das definições e propriedades.

A.2 - Solução de uma equação linear

Definição:

"Dizemos que a seqüência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ se a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira."

Exemplo:

Verifiquemos se os trios ordenados (x, y, z) = (1, 3, 8) e (x, y, z) = (− 1, 1, 2) são soluções da equação linear $2x - 3y + z = 1$

Para (x, y, z) = (1, 3, 8), teremos:

$2x - 3y + z = 1$

$2.(1) - 3.(3) + (8) = 1$

$2 - 9 + 8 = 1$

$1 = 1$(verdadeira) e, portanto, (1, 3, 8) é solução da equação.

Para (x, y, z) = (− 1, 1, 2):

$2.(-1) - 3.(1) + (2) = 1$

$-2 - 3 + 2 = 1$

$-3 = 1$ (falsa) então (− 1, 1, 2) não é solução dessa equação.

Para obtermos outras soluções dessa equação (há infinitas soluções), procedemos do seguinte modo:

1ª) Isolamos uma incógnita qualquer em função das outras:

$z = 1 - 2x + 3y$

2ª) Atribuímos valores arbitrário às incógnitas do 2° membro.

3ª) Calculamos o valor de z para os valores atribuídos a x e y.

Observe o quadro abaixo onde colocamos alguns exemplos de solução da equação dada:

x	y	$z = 1 - 2x + 3y$	z	(x, y, z)
−1	1	$z = 1 - 2(-1) + 3(1)$	6	$(-1, 1, 6)$
0	−2	$z = 1 - 2(0) + 3(-2)$	−5	$(0, -2, -5)$
−5	0	$z = 1 - 2(-5) + 3(0)$	11	$(-5, 0, 11)$
6	−9	$z = 1 - 2(6) + 3(-9)$	−38	$(6, -9, -38)$
0	0	$z = 1 - 2(0) + 3(0)$	1	$(0, 0, 1)$
a	b	$z = 1 - 2a + 3b$		$(a, b, 1 - 2a + 3b)$

Observações:

1ª) O último trio ordenado do quadro generaliza as soluções dessa equação, pois são números reais quaisquer. Nessas condições, o conjunto-solução (S) ou conjunto-verdade (V) da equação, será:
$S = \{(x, y, z) = (a, b, 1 - 2a + 3b), \forall a, b \in R\}$

2ª) Note que, apesar dessa equação ter infinitas soluções (trios ordenados), nem toda seqüência de três números reais é uma solução.

3ª) De um modo geral, para obtermos soluções de uma equação linear com n incógnitas, isolamos uma delas em função das (n-1) incógnitas restantes, atribuímos valores a estas e, finalmente, calculamos o valor da incógnita que foi isolada.

Exercícios

274 Diga, em cada caso, se a equação é linear ou não:

a) $x - 2y + z = 0$
b) $2x + 3y - x^2y = 1$
c) $x^2 + y^2 = 9$
d) $5x_1 + 0x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 = 12$
e) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = 1$
f) $x^3 + 3x^2y - xy^2 - y^3 = 2$
g) $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3} + \frac{4}{x_4} = 10$
h) $2xy + 3xz + yz + w = 7$
i) $-x_1 + 2x_2 = 3$
j) $5x = 8$

275 Verifique, em cada caso, se a seqüência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dada é ou não, solução da equação linear: $x_1 + x_2 + x_3 = 5$

a) (1, 2, 2) b) (2, 1, 2) c) (2, 2, 1) d) (0, 0, 5) e) (1, 2, 3)

f) (0, 7, – 3) g) (–11, 2, 4) h) $\left(\frac{17}{6}, \frac{5}{4}, \frac{11}{12}\right)$ i) $\left(2-\sqrt{3}, 4, \sqrt{3}-1\right)$

276 Verifique se as seqüências (x, y, z, w), dadas, são soluções da equação $0x + 0y + 0z + 0w = 0$

a) (1, 2, 3, 4) b) (– 1, 5, – 3, 2) c) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, -1\right)$

d) determinar um quarteto ordenado (x, y, z, w) que não seja solução dessa equação.

277 Verifique se os trios $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dadas são soluções da equação $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$

a) (4, 0, 0) b) $\left(-\frac{1}{3}, 4, \frac{1}{3}\right)$

c) dê um exemplo de trio ordenado (a_1, a_2, a_3) que solução dessa equação.

278 Dê o conjunto-solução da seguintes equações lineares na incógnita x:

a) $2x = 5$ b) $0x = 0$ c) $0x = 3$ d) $-6x = 0$

279 As equações abaixo são lineares e literais na incógnita x. Discuta e resolva cada uma delas em função dos parâmetros dados:

a) $ax = b$
b) $(a-2)x = a$
c) $(3-a)x = a-3$
d) $(a^2-1)x = a^2 + 2a + 1$
e) $(a^2+1)x = a^2 - 1$

280 Complete os pares ordenados (x, y) dados a seguir, de modo que sejam soluções da equação linear $2x - 3y = 4$

a) (5, y) b) (x, – 6) c) (x, 0) d) (0, y) e) (x, a), $a \in \mathbf{R}$

f) usando o resultado do item (e), escreva o conjunto-solução dessa equação.

281 Complete os trios ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dados de modo que sejam solução da equação linear $2x_1 - x_2 - 5x_3 = -1$

a) $(-3, \alpha_2, -1)$ b) $(4, -11, \alpha_3)$ c) $(\alpha_1, 2, -1)$

d) $\left(\frac{1}{2}, 3, \alpha_3\right)$, e) (a, α_2, b), $a, b \in \mathbf{R}$

f) escreva o conjunto-solução dessa equação.

282 Complete as seqüências (x, y, z, w) de modo que sejam soluções da equação $x - y - 2z + w = 0$

a) (1, y, 3, 7) b) (x, 3, – 2, – 1) c) (a, b, c, w), $a, b, c \in \mathbb{R}$.

d) Dê o conjunto-solução dessa equação.

B - Sistema Lineares

Definição:

"Chamamos sistema linear a qualquer sistema de **m** equações lineares a **n** incógnitas ($m, n \in \mathbb{N}^*$)."

Genericamente, indicamos:

$$SL \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Observe que a notação acima é totalmente análoga à usada para matrizes e determinantes.

Verificamos que esse sistema tem **m** equações (m "linhas"), **n** incógnitas mais a coluna dos termos independentes, totalizando (n + 1) "colunas".

B.1 - Solução de um sistema linear

Definição: "Dizemos que a seqüência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução do sistema linear dado se for solução de **todas** as equações desse sistema"

Obs.: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ = ênupla ordenada = conjunto ordenado com m elementos

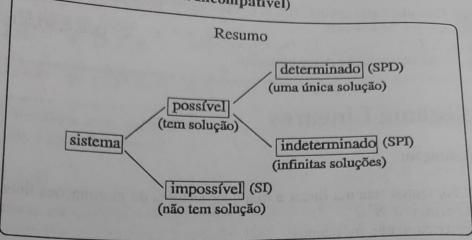
B.2 - Número de soluções de um sistema linear

Se um sistema linear tiver pelo menos uma solução (ênupla ordenada), ele será chamado de **Sistema Possível** (ou **Sistema Compatível**).

Quando o sistema tiver uma única solução, será chamado de **Sistema Possível e Determinado** (ou **Sistema Compatível e Determinado**)

Se o sistema tiver infinitas soluções, chamar-se-á **Sistema Possível e Indeterminado** (ou **Sistema Compatível e Indeterminado**)

Finalmente, se o sistema não tiver solução alguma, então será chamado de

Sistema Impossível (ou Sistema Incompatível)

B.3 - Conjunto-Solução de um Sistema Linear

Conjunto-Solução (S) ou conjunto-verdade (V) de um sistema linear é o conjunto de todas as soluções desse sistema.

Resolver um sistema linear significa determinar o seu conjunto-solução.

B.4 - Forma Matricial de um Sistema Linear

O sistema linear de **m** equações a **n** incógnitas

$$SL\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode, também, ser expresso através da seguinte igualdade de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ .. & .. & .. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou seja $A_{mxn}.X_{nx1} = B_{mx1}$ onde
A = matriz dos coeficientes (mxn)
X = matriz das incógnitas (nx1)
B = matriz dos termos independentes (mx1)

a) Matrizes completa e incompleta de um sistema linear

Mais adiante, neste livro, ao estudarmos o teorema de Rouché-Capelli, trabalharemos com as seguintes matrizes extraídas do sistema linear SL dado:

Matriz Completa — [A, B]

$$[A,B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ .. & .. & .. & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Obs: a matriz [A, B] é ordem m× (n + 1)

Matriz Incompleta — A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Obs: a matriz A, também chamada de matriz dos coeficientes, é do tipo mxn.

Exemplo: Dado o sistema linear

$$SL\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ \quad -3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 \qquad -3x_4 = 0 \end{cases}$$

podemos escrevê-lo na sua forma matricial A.X = B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3x4} \qquad X_{4x1} \qquad B_{3x1}$$

A matriz completa do sistema SL é

$$[A,B]_{3x5}=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 1 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 0 & -3 & 0\end{array}\right]$$

e a matriz incompleta de SL é

$$A_{3x4}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & -3 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

Observação: É fácil verificar que, efetuando o produto $A.X$ e igualando o resultado com a matriz B, recaímos no sistema inicial SL.

B.5 - Sistema Normais

Quando, num sistema linear, o número de equações for igual ao número de incógnitas ($m = n$), a matriz incompleta A será quadrada de ordem n e, portanto, poderemos calcular o determinantes de A: chamaremos $\det A = D$ de **determinante do sistema.**

Definição:

"Um sistema linear é chamado de **normal** se tiver **n** equações, **n** incógnitas e o determinante do sistema for diferente de zero ($D \neq 0$)"

Resumindo, temos:

sistema normal	⇔	$m = n$ e $D \neq 0$

B.6 - Regra de Cramer

a) **Teorema:**

"Um sistema linear normal é sempre possível e determinado (SPD)."

Demonstração: Se SL é um sistema normal então $m = n$, A é matriz quadrada e $\det A = D \neq 0$, portanto, A é inversível e sua inversa A^{-1} é única.

O sistema, escrito na sua forma matricial, será:

$AX = B \Rightarrow A^{-1}.(AX) = A^{-1}B \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)X = A^{-1}B \Rightarrow I_nX = A^{-1}.B \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}.B$

e esta é a única solução do sistema (a matriz $A^{-1}.B$ existe e é única)

Está, portanto, demonstrado que todo sistema normal é possível e determinado.

b) Resolução de um sistema normal

Dado o sistema normal

$$SL \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o determinante do sistema será:

$$\det A = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Chamaremos de Dj o determinante da matriz que se obtém de A substituindo sua coluna j pela coluna dos termos independentes do sistema: Assim sendo, teremos:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & .. & .. & .. \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ . & . & .. & .. \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e, assim por diante, até:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ . & . & .. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix}$$

Após estas explicações iniciais, podemos enunciar a seguinte regra prática:

Regra de Cramer

"A solução do sistema normal SL dado é a ênupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$.

onde $\alpha_j = \frac{D_j}{D}$, ou seja, $\alpha_1 = \frac{D_1}{D}, \alpha_2 = \frac{D_2}{D}, \alpha_3 = \frac{D_3}{D} ..., \alpha_n = \frac{D_n}{D}$.

Observações:

1ª) Como já foi dito, se o sistema for normal, então a solução $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha\alpha_n)$ *sempre existirá e será única (SPD).*

2ª) Para resolver um sistema normal de ordem n *usando a regra de Cramer, precisamos calcular o valor de* $(n+1)$ *determinantes de ordem* n*, portanto, quando tivermos* $n \geq 4$*, a aplicação desse método será muito trabalhosa.*

Exemplo:

Resolver, usando a regra de Cramer, o sistema normal

$$SL\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -8 \\ 5x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

O determinante do sistema é

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 35$$

e os demais determinantes (Dj) são:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -8 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 35 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -8 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 105$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 70$$

Podemos, então, calcular os valores das incógnitas:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{35}{35} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{105}{35} = 3$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{70}{35} = 2$$

e o conjunto – solução do sistema é $S\{(1, 3, 2)\}$

Observação importante: Quando tentamos aplicar a regra de Cramer a um sistema linear com n equações e n incógnitas que tenha $D = 0$ (a matriz A não é inversível) pode ocorrer um dos casos apresentados nos exemplos seguintes:

1°) No sistema:

$$SL_1 \begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 4x+3y+3z=4 \end{cases},$$

temos: $D = Dx = Dz = 0$, $Dy = 1 \neq 0$ e o sistema SL_1 é impossível (nenhuma solução).

2°) No sistema:

$$SL_2 \begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 2x+4y+6z=20 \\ 3x+6y+9z=30 \end{cases},$$

temos: $D = Dx = Dy = Dz = 0$ e o sistema SL_2 é possível e indeterminado (infinitas soluções).

3°) No sistema:

$$SL_3 \begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 2x+4y+6z=20 \\ 3x+6y+9z=25 \end{cases},$$

temos: $D = Dx = Dy = Dz = 0$ e o sistema SL_3 é impossível (nenhuma solução).

283 Verifique, em cada caso, se a seqüência $(2, -1, 1)$ é solução do sistema linear dado:

a) $\underset{(3x3)}{SL_1} \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=4 \\ x-2y-3z=1 \end{cases}$

b) $\underset{(3x3)}{SL_2} \begin{cases} 3x+0y-z=5 \\ -x-2y-3z=-3 \\ 0x+y+2z=-1 \end{cases}$

c) $\underset{(2x3)}{SL_3} \begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ x-3y+5z=10 \end{cases}$

d) $\underset{(4x3)}{SL_4} \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ x-y+z=4 \\ 2x \quad -3z=1 \\ 3x-y \quad =5 \end{cases}$

284 Complete, em cada caso, a seqüência $(1, \alpha_2)$ de modo que seja solução do sistema dado:

a) $\begin{matrix} SL_1 \\ (2x2) \end{matrix} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -7 \\ x_1 - 4x_2 = 13 \end{cases}$

b) $\begin{matrix} SL_2 \\ (3x2) \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 = 11 \end{cases}$

c) $\begin{matrix} SL_3 \\ (1x2) \end{matrix} \begin{cases} -2x_1 + 7x_2 = -30 \end{cases}$

d) $\begin{matrix} SL_4 \\ (2x2) \end{matrix} \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 11 \\ 6x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$

285 Escreva os sistemas lineares seguintes na forma matricial:

a) $SL_1 \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

b) $SL_2 \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$

c) $SL_3 \begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x \quad + 3z = 1 \\ -x - 2y \quad = 3 \end{cases}$

286 Escreva as matrizes incompleta – A – e completa – [A, B] – dos sistemas lineares do exercício anterior (285).

287 Escreva, em cada caso, as equações dos seguintes sistemas lineares dados na forma matricial. Dê, a seguir, a ordem (mxn) desses sistemas.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$

288 Utilizando o fato de que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de A (matriz incompleta), resolva o seguinte sistema linear normal:

$$SL \begin{cases} 2x - y = -1 \\ -5x + 3y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lembre-se: $AX = B \Rightarrow A^{-1}.(AX) = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.B$

289 Operando com o sistema na sua forma matricial e sabendo que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ é a inversa da matriz incompleta (A) do sistema SL, resolver:

$$SL\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

290 Usando a regra de Cramer, resolva os seguintes sistemas lineares normais:

a) $SL_1\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 5x + 4y = -5 \end{cases}$ b) $SL_2\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$ c) $SL_3\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 3y + 4z = -5 \\ x - 2y + 5z = 4 \end{cases}$

d) $SL_4\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ e) $SL_5 = \begin{cases} x - y + 0z + 2w = -1 \\ 4y + z + w = 5 \\ -x - 5y + 2z = -3 \\ 2x - z + 4w = -3 \end{cases}$

291 Utilizando a regra de Cramer, determine a, b e c, sabendo que $f(x) = ax^2 + bx + c$ e que $f(1) = -10$, $f(-2) = 11$ e $f(3) = -4$

292 Resolva pela regra de Cramer os sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x - y + 7}{x + z} = \dfrac{y - 2z}{x - y} = 3 \\ z = x - 2y + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x - y - 9}{2z - x} = 2 \\ \dfrac{3x + z + 7}{y - z} = 3 \\ \dfrac{y + 2z - 6}{x + y} = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{3}{z} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{2}{z} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

293 Determine a para que o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = \dfrac{a-2}{a+1} \\ 2x - y + 3z = \dfrac{a-2}{a+1} \\ x - 2y + \left(a^2+2\right)z = \dfrac{a^3+a-4}{a+1} \end{cases}$$

seja normal e ache o seu conjunto-solução.

294 Determine a para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + (a+13)y + 7z = 0 \\ 3x - 2y + az = 0 \end{cases}$$

seja normal e ache o seu conjunto-solução.

C - Escalonamento de um sistema linear

A aplicação da regra de Cramer tem, como restrições, o fato de só poder ser aplicada a sistemas normais ($m=n$ e $D\neq 0$) e por ser muito trabalhoso aplicá-la quando o número de equações é maior que 3. Em vista disso, estudaremos a seguir um novo método, mais prático, aplicável para resolver qualquer tipo de sistemas lineares: o método do escalonamento.

C.1 - Sistemas escalonados

Dizemos que o sistema

$$SL\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \to E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \to E_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \to E_m \end{cases}$$

cujas equações são $E_1, E_2, E_3, \ldots E_m$, está escalonado quando:

1º) Existe pelo menos um coeficiente de incógnita não nulo em cada equação.

2º) O número de coeficientes nulos consecutivos (da esquerda para a direita), a partir do 1º coeficiente (a_{i1} = coeficiente de x_1), cresce de uma equação qualquer para a seguinte ($E_i \to E_{i+1}$).

Observe os seguintes exemplos de sistemas escalonados:

$$SL_1 \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \text{ (nenhum "zero")} \\ 0x_1 + x_2 - x_3 = 5 \text{ (um "zero")} \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -6 \text{ (dois "zeros")} \end{cases}$$

$$SL_2 \begin{cases} x - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -6 \\ \quad 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ \quad\quad x_3 - 4x_4 = -7 \end{cases}$$

$$SL_3 \begin{cases} x - y - 2z + w = -4 \\ \quad\quad z - 2w = 7 \end{cases}$$

C.2 - Resolução de sistemas escalonados

Quando um sistema linear está escalonado, podem ocorrer dois casos:

1º) m=n (nº de equações = nº de incógnitas)
2º) m<n (nº de equações < nº de incógnitas)

(1º caso) m=n

Neste caso, teremos:

$$SL \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

o determinante do sistema será:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33}\cdots .a_{nn} \neq 0$$

(matriz triangular)

Este sistema será normal e, portanto, um sistema possível e determinado (SPD).

Como exemplo, vamos resolver o sistema escalonado seguinte, que tem $m=n$:

$$SL_1 \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -7\,(E_1) \\ x_2 - x_3 = 5\,(E_2) \\ 2x_3 = -6\,(E_3) \end{cases}$$

Observando que, neste caso, só há um coeficiente de incógnita **não nulo** na última equação (E_3), dois coeficientes não nulos na penúltima (E_2), e assim por diante, começamos resolvendo a última equação:

$$(E_3)\ 2x_3 = -6 \Rightarrow \boxed{x_3 = -3}$$

A seguir, substituímos o valor de x_3 em (E_2):

$$(E_2)\ x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow x_2 - (-3) = 5$$
$$x_2 + 3 = 5$$

$$\boxed{x_2 = 2}$$

E, finalmente, substituímos os valores de x_2 e x_3 em (E_1):

$$(E_1)\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 - (2) + 3.(-3) = -7 \Rightarrow$$

$$\boxed{x_1 = 4}$$

O sistema (SL_1) é, como já sabíamos, possível e determinado e seu conjunto-solução é

$$S_1 = \{(4, 2, -3)\}$$

Observação: Quando não há nada que cause dúvida, convenciona-se colocar as soluções (seqüências) de um sistema com os valores na mesma ordem em que aparecem as incógnitas nas equações desse sistema.

No exemplo acima, temos:

$$(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha\alpha_3) = (4, 2, -3)$$

(2º caso) m < n

Quando o número de equações for menor que o número de incógnitas, a matriz incompleta A do sistema escalonado terá o número de linhas (m) menor que o número de colunas (n).

Observe:

$$SL\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0\,x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ 0\,x_1 + 0x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0x_1 + 0x_2 + ... + a_{mk}x_k ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Neste caso, na última equação haverá mais que uma incógnita e o sistema será possível e indeterminado (SPI).

1º exemplo:

Observe, como exemplo, o seguinte sistema escalonado (3 x 4):

$$SL_2\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_3 - 4x_4 = -7 \end{cases}$$

Chamamos de **variáveis livres** do sistema a todas as incógnitas que não apareçam como 1ª incógnita (do lado esquerdo) de nenhuma equação: no nosso exemplo é apenas o x_4.

O número de variáveis livres de um sistema em que m < n é, sempre, (n – m) e é chamada de **grau de indeterminação (g.i.)** do sistema. No exemplo, temos:

g.i. = n – m = 4 – 3 = 1

portanto, o sistema SL_2 tem apenas uma variável livre que é o x_4.

Para resolver este tipo de sistema, começamos passando para os 2ºs membros das equações, todas as variáveis livres que houver:

$$SL_2 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 - x_4 \\ 3x_2 + x_3 = -1 - 2x_4 \\ x_3 = -7 + 4x_4 \end{cases}$$

A seguir, atribuímos valores genéricos às variáveis livres (veja os exercícios 280, 281 e 282): seja $x_4 = a$, $\forall a \in R$.

$$SL_2 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 - a \\ 3x_2 + x_3 = -1 - 2a \\ x_3 = -7 + 4a \end{cases}$$

A partir daqui, recaímos no exemplo anterior (SL_1):

$$(E_3) \quad \boxed{x_3 = -7 + 4a}, \ \forall a \in R.$$

substituindo em (E_2):

$$3x_2 + x_3 = -1 - 2a$$

$$3x_2 + (-7 + 4a) = -1 - 2a$$

$$3x_2 = 6 - 6a \Rightarrow x_2 = \frac{6 - 6a}{3}$$

$$\boxed{x_2 = 2 - 2a}$$

Substituindo em (E_1):

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 - a$$

$$x_1 - 2(2 - 2a) + 3(-7 + 4a) = -6 - a$$

$$x_1 - 4 + 4a - 21 + 12a = -6 - a$$

$$\boxed{x_1 = 19 - 17a}$$

O sistema será, então, possível indeterminado (infinitas soluções) e seu conjunto-solução será:

$$S_2 = \{(19 - 17a, 2 - 2a, -7 + 4a, a), \forall a \in R\}$$

Observações:

1ª) Se quisermos obter exemplos de soluções desse sistema, basta atribuir valores ao parâmetro $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$. *Por exemplo:*

$a = 1 \Rightarrow (19 - 17a, 2 - 2a, -7 + 4a, a) = (2, 0, -3, 1)$

$a = 0 \Rightarrow (19 - 17a, 2 - 2a, -7 + 4a, a) = (19, 2, -7, 0)$

e assim por diante.

2ª) Voltamos a salientar que, apesar desse sistema ter infinitas soluções, nem todo quarteto ordenado é solução dele: (1, 1, 1, 1), por exemplo, não é solução (verifique).

2º exemplo:

$$SL_3 \begin{cases} x - y - 2z + w = -4 \\ z - 2w = 7 \end{cases}$$

Neste sistema, possível e indeterminado, o grau de indeterminação é g.i. = n – m = 4 – 2 = 2 e as variáveis livres são w e y.

Para resolver (SL_3), fazemos:

$$SL_3 \begin{cases} x - 2z = -4 + y - w \\ z = 7 + 2w \end{cases}$$

Sejam y = a e w = b, $\forall\ (a,b) \in R^2$:

$$SL_3 \begin{cases} x - 2z = -4 + a - b \\ z = 7 + 2b \end{cases}$$

Portanto: z = 7 + 2b

Substituindo em (E_1):

$$x - 2 \cdot (7 + 2b) = -4 + a - b$$

$$x - 14 - 4b = -4 + a - b$$

$$\boxed{x = 10 + a + 3b}$$

O conjunto-solução de (SL_3) será:

$$S = \{(10 + a + 3b,\ a,\ 7 + 2b,\ b),\ \forall\ (a,b) \in R^2\}$$

Podemos, também, obter exemplos de soluções desse sistema, só que, agora, atribuindo valores ao par de parâmetros $(a,b) \in R^2$. Por exemplo:

$(a,b) = (0,1) \Rightarrow (10 + a + 3b, a, 7 + 2b, b) = (13, 0, 9, 1)$
$(a,b) = (4, -3) \Rightarrow (10 + a + 3b, a, 7 + 2b, b) = (5, 4, 1, -3)$ e assim por diante.

C.3 - Sistemas equivalentes

Definição:

" Dizemos que dois sistemas lineares (SL_1) e (SL_2) são equivalentes quando seus conjuntos-soluções forem iguais $(S_1 = S_2)$". Indicamos:

$(SL_1) \sim (SL_2)$

Exemplos:

1º) $SL_1 \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(3,1)\}$

$SL_2 \begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{(3,1)\}$

$S_1 = S_2 \Leftrightarrow (SL_1) \sim (SL_2)$

2º) $SL_1 \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \varnothing$ (sistema impossível)

$SL_2 \begin{cases} 6x-9y=1 \\ 4x-6y=3 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \varnothing$

$S_1 = S_2 \Leftrightarrow (SL_1) \sim (SL_2)$

3º) $SL_1 \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow S_1\{(4-a, a), \forall a \in R\}$

(sistema imposssivel e indeterminado)

$SL_2 \begin{cases} 3x+3y=12 \\ 5x+5y=20 \end{cases} \Rightarrow S_2\{(4-b, b), \forall b \in R\}$

$S_1 = S_2 \Leftrightarrow (SL_1) \sim (SL_2)$

C.4 - Transformações elementares sobre um sistema linear

Veremos, neste item, algumas transformações sobre as equações do sistema (SL_1) que o transformem num sistema (SL_2) escalonado e tal que $(SL_1) \sim (SL_2)$, ou seja, são transformações que não alteram o conjunto-solução do sistema inicial e o tornam mais simples de resolver.

a) 1ª transformação elementar

" Multiplicar uma equação qualquer de (SL_1) por um número $a \in R^*$ ". Indicaremos: $E_i.(a)$.

Exemplo:

$$SL_1 \begin{cases} 2x+y-z=1 \, (E_1) \\ 2y+z=2 \, (E_2) \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{6}z=\frac{1}{2} \, (E_3) \end{cases}$$

Fazendo $E_3.(12)$ (3ª equação multiplicada por 12), obtemos o sistema:

$$SL_2 \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 2y+z=2 \\ 4x-3y+2z=6 \end{cases} \text{, tal que}$$

$(SL_1) \sim (SL_2)$

Observações:

1ª) esta transformação será útil, por exemplo, quando quisermos tornar inteiros os coeficientes de uma equação.

2ª) Quando, na discussão de um sistema, multiplicarmos uma equação por um parâmetro $a \in R$, é necessário discutir dois casos: $a \neq 0$ e $a = 0$.

b) 2ª transformação elementar

" Permutar entre si duas equações do sistema SL_1 ". Indicaremos: $E_i \leftrightarrow Ej$.

Exemplo:

$$SL_1 \begin{cases} 2x+y-3z=0 \, (E_1) \\ 3x+2y+4z=1 \, (E_2) \\ 1x-y-z=2 \, (E_3) \end{cases}$$

Fazendo $E_3 \leftrightarrow E_1$ (permutar 1ª e 3ª equações), obtemos o sistema

$$SL_2 \begin{cases} 1x - y - z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{tal que}$$

$(SL_1) \sim (SL_2)$

Observações

1ª) Esta transformação será útil, por exemplo, quando pretendermos que o coeficiente a_{11} se torne igual a 1.

2ª) Numa ampliação desta transformação elementar, é permitido reescrever o sistema colocando as equações em qualquer ordem, isto é, fazendo uma permutação qualquer dessas equações.

c) 3ª transformação elementar

" Multiplicar uma equação por um número $a \in R^*$ e somá-la (membro a membro) a outra equação de (SL_1)". Indicaremos: $E_i.(a) \xrightarrow{+} E_j$

Exemplo:

$$SL_1 \begin{cases} x - y + 2z = 1 \, (E_1) \\ 2x + y + z = 0 \, (E_2) \\ -3x - y + 4z = 2 \, (E_3) \end{cases}$$

Fazendo $E_1.(-2) \xrightarrow{+} E_2$ (1ª equação multiplicada por (–2) e somada à 2ª equação), obtemos o sistema:

$$SL_2 \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3y - 3z = -2 \\ -3x - y + 4z = 2 \end{cases} \quad \text{tal que}$$

$(SL_1) \sim (SL_2)$

Observações:

1ª) Note que E_1 e E_3 permaneceram inalteradas.

2ª) Esta transformação será útil quando quisermos anular determinados coeficientes do sistema.

C.5 - Escalonamento de um sistema linear (Método de Gauss-Jordan)

Usando as transformações elementares, descreveremos um método que transforma o sistema (SL_1) no sistema escalonado (SL_2) tal que $(SL_1) \sim (SL_2)$.

Esse método, chamado de método de Gauss-Jordan, permite resolver e discutir sistemas lineares mais facilmente.

Para facilitar o aprendizado deste método, cada etapa dele será aplicada na resolução do sistema linear.

$$SL_1 \begin{cases} 2x - y + 5z = -9 \ (E_1) \\ -3x + 6y - 10z = 30 \ (E_2) \\ x - y + 3z = -7 \ (E_3) \end{cases}$$

1ª etapa: "fazer com que o coeficiente a_{11} (1ª equação e 1ª incógnita) do sistema se torne igual a 1".

No sistema (SL_1) fazemos $E_1 \leftrightarrow E_3$, obtendo:

$$SL_2 \begin{cases} x - y + 3z = -7 \\ -3x + 6y - 10z = 30 \\ 2x - y + 5z = -9 \end{cases}$$

2ª etapa: "tornar nulos todos os coeficientes da 1ª incógnita abaixo de a_{11}, ou seja, da 2ª equação até a última".

Em (SL_2) fazemos:

$E_1.(3) \xrightarrow{+} E_2$ e, a seguir,

$E_1.(-2) \xrightarrow{+} E_3$, obtendo:

$$SL_3 \begin{cases} x - y + 3z = -7 \\ 0x + 3y - z = 9 \\ 0x + y - z = 5 \end{cases}$$

3ª etapa: "fazer com que o 1º coeficiente (à esquerda) não nulo da 2ª equação se torne igual a 1, retornando à 1ª etapa".

Em (SL_3) fazemos:

$E_2 \leftrightarrow E_3$, obtendo:

$$SL_4\begin{cases} x - y + 3z = -7 \\ 1y - z = 5 \\ 3y - z = 9 \end{cases}$$

Em SL_4 fazemos:

$E_2.(-3) \xrightarrow{+} E_3$, obtendo finalmente,

$$SL_5\begin{cases} x - y + 3z = -7 \\ y - z = 5 \\ 2z = -6 \end{cases}$$

que é o sistema (SL_1) escalonado.

Seu conjunto-solução é:

S={(4,2,-3)}

(veja a resolução deste sistema escalonado à página 138)

Observações importantes:

1ª) Após o escalonamento de um sistema, as equações que recaírem na forma $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n = 0$ podem ser eliminadas.

2ª) Se, ao escalonarmos um sistema, obtivermos uma equação da forma: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n = b$ $(b \neq 0)$ esse sistema será, evidentemente, impossível, isto é, seu conjunto-solução será $S = \varnothing$.

3ª) Um sistema em que m>n (nº de equações maior que o número de incógnitas) após escalonado recairá, sempre, num dos seguintes casos:

a) sistema impossível (SI)

b) sistema possível e determinado (m=n)

c) sistema possível e indeterminado (m<n)

4ª) Há diversas maneiras distintas de se escalonar um sistema e, portanto, podem ocorrer diferentes resultados finais para o escalonamento de um mesmo sistema.

Exemplos:

1º) Resolver o seguinte sistema de ordem 4 x 4:

$$SL\begin{cases} 2x-2y-4z+2w=-8 \\ -x+y+3w=-10 \\ x-y-10z+17w=-60 \\ 2x-2y-3z=-1 \end{cases}$$

Fazendo $E_1.\left(\frac{1}{2}\right)$, obtemos: $SL\begin{cases} 1x - y - 2z + w = -4 \\ -x + y + 3w = -10 \\ x - y - 10z + 17w = -60 \\ 2x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

A seguir, fazemos: $E_1.(1) \xrightarrow{+} E_2$

$E_1.(-1) \xrightarrow{+} E_3$

$E_1.(-2) \xrightarrow{+} E_4$, obtendo:

$$SL\begin{cases} x - y - 2z + w = -4 \\ -2z + 4w = -14 \\ -8z + 16w = -56 \\ z - 2w = 7 \end{cases}$$

Fazendo $E_2.\left(-\frac{1}{2}\right)$, temos: $SL\begin{cases} x - y - 2z + w = -4 \\ 1z - 2w = 7 \\ -8z + 16w = -56 \\ z - 2w = 7 \end{cases}$

e, em seguida, $E_2.(8) \xrightarrow{+} E_3$

$E_2.(-1) \xrightarrow{+} E_4$ e temos

$$SL\begin{cases} x - y - 2z + w = -4 \\ z - 2w = 7 \\ \left.\begin{array}{r} 0z + 0w = 0 \\ 0z + 0w = 0 \end{array}\right\} \text{são eliminadas} \end{cases}$$

e recaímos, finalmente, no sistema escalonado de ordem 2 x 4:

$$SL\begin{cases} x - y - 2z + w = -4 \\ z - 2w = 7 \end{cases}$$

Como $m<n$, este sistema é possível e indeterminado e seu conjunto-solução é:

$$S = \{(10 + a + 3b, a, 7 + 2b, b)\ \forall\ (a,b) \in R^2\}$$

(veja sua resolução à página 141)

2º) Resolver o seguinte sistema de ordem 5 x 4:

$$SL\begin{cases} 3x_1 - 12x_2 + 8x_3 - 5x_4 = -23 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -13 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -6 \\ -21x_2 - 5x_3 - 22x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -1 \end{cases}$$

Fazemos $E_1 \leftrightarrow E_3$

$$SL\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -13 \\ 3x_1 - 12x_2 + 8x_3 - 5x_4 = -23 \\ -21x_2 - 5x_3 - 22x_4 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 2 \end{cases}$$

e, em seguida, $E_1.(-2) \xrightarrow{+} E_2$

$E_1.(-3) \xrightarrow{+} E_3$

$E_1.(-1) \xrightarrow{+} E_5$

$$SL\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ -6x_2 - x_3 - 8x_4 = -5 \\ -21x_2 - 5x_3 - 22x_4 = -7 \\ 6x_2 + x_3 + 8x_4 = 8 \end{cases}$$

Depois, fazemos $E_2.\left(\frac{1}{3}\right)$ e $E_3.(1) \xrightarrow{+} E_5$

$$SL\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -6 \\ 1x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \\ -6x_2 - x_3 - 8x_4 = -5 \\ -21x_2 - 5x_3 - 22x_4 = -7 \\ 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3 \end{cases}$$

Podemos interromper aqui a resolução desse sistema, pois não existe seqüência (x_2, x_3, x_4) que satisfaça à equação E_5 e, portanto, o sistema é impossível e o conjunto-solução é $S = \varnothing$

3º) Discutir e, em seguida, resolver em função do parâmetro a, o seguinte sistema linear:

$$SL\begin{cases} x-y+2z=\dfrac{a-2}{a+1} \\ 2x-y+3z=\dfrac{a-2}{a+1} \\ x-2y+\left(a^2+2\right)z=\dfrac{a^3+a-4}{a+1} \end{cases}$$

onde $a \in R \mid a \neq -1$

1ª resolução: Pelo método de Gauss-Jordan

Fazemos

$E_1.(-2)\xrightarrow{+}E_2$ e

$E_1.(-1)\xrightarrow{+}E_3$

$$SL\begin{cases} x-y+2z=\dfrac{a-2}{a+1} \\ y-z=\dfrac{2-a}{a+1} \\ -y+a^2z=\dfrac{a^3-2}{a+1} \end{cases} \text{ e, a seguir}$$

$E_2.(1)\xrightarrow{+}E_3$

$$SL\begin{cases} x-y+2z=\dfrac{a-2}{a+1} \\ y-z=\dfrac{2-a}{a+1} \\ \left(a^2-1\right)z=\dfrac{a^3-a}{a+1} \end{cases}$$

Como este sistema está escalonado, vamos discutir a equação E_3:

$$\left(a^2-1\right)z=\frac{a(a+1)(a-1)}{a+1}$$

ou seja, (a+1) (a–1) z = a (a–1) pois $a \neq -1$.

Temos, então, duas possibilidades para este sistema:

(I) $a \neq 1 \quad \Rightarrow z=\dfrac{a(a-1)}{(a+1)(a-1)}=\dfrac{a}{a+1}$

Neste caso o sistema é possível e determinado (m=n=3) e terminando de resolver este sistema, obteremos:

$$S=\left\{\left(\frac{-a}{a+1},\frac{2}{a+1},\frac{a}{a+1}\right)\right\} \text{ para } a\neq 1 \text{ e } a\neq -1$$

(II) a=1

Neste caso, substituindo a por 1 no sistema dado, temos:

$$SL\begin{cases} x-y+2z=\dfrac{-1}{+2} \\ y-z=\dfrac{1}{2} \quad \text{(esta equação é eliminada)} \\ 0z=0 \end{cases}$$

O sistema é, portanto, possível e indeterminado (m<n) e, resolvendo-o, teremos:

$$S=\left\{\left(-b,\frac{2b+1}{2},b\right),\forall b\in R\right\} \text{para } a=1$$

2ª resolução: Pela regra de Cramer

Observação: Só é possível aplicar a regra de Cramer porque, neste sistema, o número de equações é igual ao número de incógnitas (m=n).

Começamos calculando o determinante do sistema (D):

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & a^2+2 \end{vmatrix}=a^2-1, \text{ onde } a\neq -1.$$

Temos, então, dois casos

(I) $a\neq 1 \Rightarrow D\neq 0 \Rightarrow$ sistema normal.

Aplicamos, então, a regra de Cramer:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-a^2+a}{a^2-1}=\frac{-a(a-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{-a}{a+1}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{2a-2}{a^2-1}=\frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a+1}$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{a^2 - a}{a^2 - 1} = \frac{a(a-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a}{a+1}$$

Portanto:

$$S = \left\{ \left(\frac{-a}{a+1}, \frac{2}{a+1}, \frac{a}{a+1} \right) \right\}$$

para $a \neq 1$ e $a \neq -1$ (veja exercício 293)

(II) $a=1 \Rightarrow D=0$

Neste caso, substituímos a por 1 no sistema inicial e procedemos como na 1ª resolução deste exemplo.

C.6 - Discussão de um sistema escalonado

Sendo **m** o número de equações e **n** o número de incógnitas do sistema escalonado, ocorrerá sempre um dos seguintes casos:

1º) $m = n \Leftrightarrow$ sistema possível determinado (SPD)
2º) $m < n \Leftrightarrow$ sistema possível indeterminado (SPI)
3º) aparece uma equação da forma $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$ $(b \neq 0)$
$\Leftrightarrow$ sistema impossível (SI)

C.7 - Observação sobre o método de Gauss-Jordan

Na verdade, o método de Gauss-Jordan continua além do que foi feito no exemplo dá página 143 progredindo até que a matriz completa do sistema fique na forma:

$$[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Mostraremos, a seguir, as etapas restantes do método aplicado àquele exemplo:

$$SL_5 \begin{cases} x - y + 3z = -7 \\ y - z = 5 \\ 2z = -6 \end{cases}$$

$E_2.(1) \xrightarrow{+} E_1$ e

$E_3.\left(\frac{1}{2}\right)$

$$SL_6\begin{cases} x+0y+2z=-2 \\ y-z=5 \\ z=-3 \end{cases}$$

$E_3.(1)\xrightarrow{+}E_2$ e

$E_3.(-2)\xrightarrow{+}E_1$

$$SL_7\begin{cases} x+0y+0z=4 \\ 0x+y+0z=2 \\ 0x+0y+z=-3 \end{cases}$$

Este sistema corresponde à matriz completa mostrada anteriormente e o método foi aplicado até o final. Seu conjunto-solução é $S=\{(4, 2, -3)\}$

Na prática, entretanto, interrompemos o escalonamento no sistema SL_5 para agilizar a resolução.

D - Sistema linear homogêneo

Definição:

"Um sistema linear é homogêneo quando todos os termos independentes são iguais a zero ($b_1 = b_2 =...= b_m = 0$)".

Nessas condições, o sistema linear de ordem mxn

$$SL\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

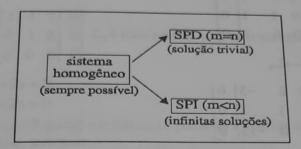
é homogêneo. É imediato que a ênupla ordenada $(0, 0, ..., 0)$ é solução desse sistema, portanto concluímos que **um sistema homogêneo é sempre possível.**($(0, 0, ..., 0)$ é chamada de solução trivial ou solução nula do sistema).

Após escalonar esse sistema, teremos um dos dois casos seguintes:

1º) $m = n \Leftrightarrow S=\{(0, 0, ..., 0)\}$ (SPD) e a única solução é a trivial.

2º) $m < n \Leftrightarrow$ sistema possível e indeterminado (SPI).

e, neste caso, o sistema terá infinitas soluções além da solução trivial (estas soluções são chamadas de soluções não triviais ou soluções próprias do sistema)

Resumindo, temos:

1º Exemplo:

Resolver o seguinte sistema homogêneo:

$$SL\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -3x-y+z=0 \\ 4x+2y-5z=0 \end{cases}$$

Como exemplo, e para facilitar, vamos escalonar este sistema homogêneo operando sobre sua matriz completa. Observe:

$$[A,B]_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Efetuemos:

$L_1.(3) \xrightarrow{+} L_2$ e

$L_1.(-4) \xrightarrow{+} L_3$

$$[A,B]_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

Em seguida, $L_2.(-1)$ e $L_3.(-1)$

$$[A,B]_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$L_3.(1) \xrightarrow{+} L_2$

$$[A,B]_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_2.(-6) \xrightarrow{+} L_3$$

$$[A,B]_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema escalonado

$$SL \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ \quad y+z=0 \\ \quad -13z=0 \end{cases}$$

que tem m=n=3 e é, portanto, possível e determinado. Resolvendo esse sistema, obteremos:

$$(E_3)\ z=0 \overset{(E_2)}{\Rightarrow} y=0 \overset{(E_1)}{\Rightarrow} x=0 \text{ e, finalmente, } S=\{(0,0,0)\}$$

Como já sabíamos, a sua única solução é a solução trivial (nula).

2º exemplo

Resolver o sistema homogêneo

$$SL \begin{cases} x+4y+2z=0 \\ -2x-7y-2z=0 \\ 3x+7y-4z=0 \end{cases}$$

sua matriz completa é:

$$[A,B]_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo $L_1.(2) \xrightarrow{+} L_2$ e $L_1(-3) \xrightarrow{+} L_3$, obtemos:

$$[A,B]_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{array}\right]$$

$L_2(5) \xrightarrow{+} L_3$

$$[A,B]_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ L_3 é eliminada e o sistema escalonado é:

$$SL\begin{cases} x+4y+2z=0 \\ \quad y+2z=0 \end{cases}$$

onde m=2 e n=3 (m<n) e o sistema é possível e indeterminado.
Resolvendo-o, teremos:

$$SL\begin{cases} x+4y=-2z \\ \quad y=-2z \end{cases}$$

Seja z=a, $\forall a \in R$
$y=-2a \Rightarrow x=-2a-4.(-2a)=6a$ e, portanto, $S=\{(6a,-2a,a), \forall a \in R\}$ (o grau de indeterminação é g.i. = n–m = 3–2 = 1)

Esse sistema tem infinitas soluções e, como exemplo, podemos obter algumas delas:

$a = 0 \Rightarrow (6a, -2a, a) = (0, 0, 0)$ (solução trivial)
$a = 1 \Rightarrow (6a, -2a, a) = (6, -2, 1)$
$a = -2 \Rightarrow (6a, -2a, a) = (-12, 4, -2)$ e assim por diante.

295 Classifique (SPD, SPI ou SI) e a seguir resolva cada um dos sistemas lineares escalonados seguintes:

a) $\begin{cases} x+2y=21 \\ \quad y=8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+4y+3z=-2 \\ \quad y-z=-4 \\ \quad 5z=10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+0y+0z+0w=-1 \\ \quad y+0z+0w=3 \\ \quad z+0w=12 \\ \quad w=-7 \end{cases}$

296 Apresentamos, a seguir, sistemas lineares escalonados dados através de suas matrizes completas. Resolva-os:

a) $[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

b) $[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right]$

c) $[A,B]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&3&1\\0&1&-1&2&5\\0&0&1&1&2\\0&0&0&0&4\end{array}\right]$ d) $[A,B]=\left[\begin{array}{cc|c}1&3&0\\0&-4&-4\end{array}\right]$

e) $[A,B]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&6&2\\0&1&-1&2&-5\\0&0&1&3&-3\\0&0&0&-5&15\end{array}\right]$ f) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&0&2&10\\0&0&1&-3&0&-9\end{array}\right]$

297 Considere os sistemas

$$(S_1)\begin{cases}2x-3y=2\\x+y=6\end{cases} \text{ e } (S_2)\begin{cases}ax-by=-10\\2ax+3by=10\end{cases}.$$

Determine a e b de modo que esses sistemas sejam equivalentes.

298 Determine a,b e c para que os sistemas

$$\begin{cases}2ax-by-cz=-2\\3ax+2by+2cz=-3\\aax-by+3cz=-25\end{cases} \text{ e } \begin{cases}x+y+z=6\\2x-y+2z=3\\3x+y-z=4\end{cases} \text{ sejam equivalentes.}$$

299 Discutir os seguintes sistemas escalonados (não é necessário resolvê-los) em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases}x-y+z=1\\y-2z=-3\\(a-4)z=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+2y-z=3\\y+4z=2\\(a+2)z=0\end{cases}$ c) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&6&-1\\0&1&-3&3\\0&0&2&a-3\end{array}\right]$

d) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&-2&4\\0&1&7&5\\0&0&0&a^2-9\end{array}\right]$ e) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&6&9&1\\0&1&-3&2\\0&0&a-2&a+2\end{array}\right]$

f) $\begin{cases}x-3y+z=-10\\y-z=4\\(a^2-4)z=a-2\end{cases}$ g) $\begin{cases}x+4y+2z=8\\y-3z=-1\\(a+1)z=a^2-1\end{cases}$ h) $\begin{cases}x+y+z=13\\y+5z=6\\(a^2-1)z=a^2-a\end{cases}$

300 Classifique e a seguir resolva os seguintes sistemas homogêneos escalonados:

a) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y+4z=0 \\ y-2z=0 \\ 3z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y=0 \\ -2y=0 \end{cases}$

d) $\{x+4y=0$

e) $[A, B]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right]$

301 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y-z=a+1 \\ y-z=-a-1 \\ (a-2)z=2a(a-2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-az=a^2-1 \\ y-(a+1)z=a-a^2 \\ (a-1)z=a^2-2a+1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{2a+6}{a-3} \\ y-z=\dfrac{12a}{a^2-9} \\ (a^2-9)z=a^2-6a+9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y-z=\dfrac{a}{2} \\ 2ay+az=3 \\ (a^2-2a)z=a-2 \end{cases}$

302 Transforme em sistema escalonado e classifique os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} x-2y-z=1 \\ 2x-3y-7z=4 \\ x-y-3z=9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y-2z+4w=1 \\ 2x-6y-z+6w=5 \\ x-3y+z+5w=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3y+4z=5 \\ 2x-y-z=12 \\ 6x-5y+2z=31 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+3y-2z+w=1 \\ 2x+9y-6z-w=4 \\ x+6y-4z-2w=3 \\ x+6y-3z-3w=4 \\ 3x+15y-10z-2w=10 \end{cases}$

303 Resolver, escalonando, os sistemas:

a) $\begin{cases} x+3y=3 \\ 3x+4y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-6y=2 \\ 6x-9y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=6 \\ 6x-2y=9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y=7 \\ 2x+3y=-6 \\ 3x-2y=17 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+4y=-2 \\ 3x-5y=10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+3y-2z=7 \\ 2x-5y+3z=-18 \\ 5x-y-2z=-5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+2z=11 \\ 2x-3y+3z=7 \\ 3x-y+2z=5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x-3y-4z=1 \\ 2x-y+3z=3 \\ 3x+y+10z=6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x-y-2z=3 \\ 2x-3y-5z=7 \\ 3x-2y-z=-4 \\ 3x-3y-2z=-3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+2y-2z=-3 \\ 2x-3y+z=-5 \\ 4x+y-3z=-11 \\ -5x+11y-5z=12 \end{cases}$

304 Resolver por escalonamento os sistemas:

a) $\begin{cases} x-2y-2z-3w=3 \\ 3x-y+2z=-1 \\ 2x+3y+2z-8w=-7 \\ 4x-3y+z+5w=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-6z-4w=6 \\ 3x-y-6z-4w=2 \\ 2x+3y+9z+2w=6 \\ 3x+2y+3z+8w=-7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-3y+2z-w=8 \\ 3x-2y+z-3w=7 \\ 2x-y-5w=6 \\ 5x-3y+z-8w=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+3y-z+w=1 \\ 8x+12y-9z+8w=3 \\ 4x+6y+3z-2w=3 \\ 2x+3y+9z-7w=3 \end{cases}$

305 Discutir os seguintes sistemas (não é necessário achar o conjunto solução).
Sugestão: Faça por escalonamento.

a) $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 4x-ay=a+10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+(a^2-5)y=a+1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-(a-2)y=a \\ ax+(2a-4)y=2a^2-2a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-3y=a \\ ax-(2a+3)y=a^2+a-3 \\ -x+2ay=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y-2z=1 \\ -x+2y+z=a-1 \\ -x+3y+(a-2)z=3a-3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-2y-z=7 \\ 2x-3y-(a+2)z=a+14 \\ x-y+\left(a^2-a-2\right)z=3a+5 \end{cases}$

306 Determine a, b e c de modo que o sistema

$\begin{cases} (a-3)2x-3y+5z=b-2 \\ (b-2)x+y-2z=2a-3 \\ (c+1)x-y-3z=b+c \end{cases}$ seja homogêneo.

307 Resolver por escalonamento os sistemas:

a) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x-y-8z=0 \\ 5x-y-8z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y-2z=0 \\ 3x+2y+z=0 \\ x-8y-5z=0 \end{cases}$

308 Classifique com SPD ou SPI os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-3y-2z=0 \\ x-y-z=0 \\ 2x-5y-3z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y-3z=0 \\ 2x-5y+z=0 \\ 5x-11y-z=0 \end{cases}$

309 Determine a para que o sistema seja possível e determinado (SPD) nos casos:

a) $\begin{cases} ax-2y=0 \\ 2ax+3y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a-1)x+(a+2)y=0 \\ (a-2)x+2(a-2)y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+(a+2)y+(a+4)z=0 \\ x-y+z=0 \\ (a+5)x+3y+az=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (a+2)x+y+(a+5)z=0 \\ -3x+2y+(a+3)z=0 \\ (-a-1)x-y+az=0 \end{cases}$

310 Discutir os sistemas seguintes. Não é necessário achar o conjunto-solução. Sugestão: Como o número de equações é igual ao número de incógnitas $(m = n)$, pense, em primeiro lugar, nos sistemas normais.

a) $\begin{cases} ax-(a+1)y=8 \\ 2ax-(a+4)y=8a \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a-2)x+ay=a+4 \\ ax+(2a-3)y=15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax+2ay=4a \\ (a-3)x+(a-1)y=2a-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (a-1)x-(a+2)y=6 \\ ax-2ay=b \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+3y+(a+1)z=-5 \\ (a+1)x+ay+z=7 \\ 2x+3y+az=-1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (a+3)x-y+(a+2)z=2 \\ x+ay+z=1 \\ 2x+(a+4)y-3z=6 \end{cases}$

311 Discutir o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+az=2 \\ ax+2y+z=1 \end{cases}$$

(POLI-49).

312 Determinar a, de modo que o sistema

$$\begin{cases} ax+2y=0 \\ 2x+ay=3 \\ x+ay=1 \end{cases}$$

seja compatível. (FEI-58).

313 Para que valores de a são equivalentes os sistema:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} ax+y=a+1 \\ x+y=2 \end{cases} ?$$

(POLI-60).

314 Discutir o sistema:

$$\begin{cases} (2a-1)^2x+\left(4a^2-1\right)y=(2a+1)^2 \\ (4a-1)x+(2a+1)y=\left(4a^2-1\right) \end{cases}$$

segundo os valores de a. (FEI-58)

315 Discutir o sistema

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x - y = m \end{cases}$$ (MACK-55).

316 Estudar o sistema

$$\begin{cases} k(x+y) + z = 0 \\ k(y+z) + x = 0 \\ k(x+z) + y = 0 \end{cases}$$ (EEM-66).

317 Discutir o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ -x + 2y - az = b \\ ax - ay + 6z = 2 \end{cases}$$ (EEM-67).

Exercícios de Fixação

318 Dada a equação $2x - 3y + z = 16$, dizer se a ênupla ordenada dada em cada caso é ou não solução da equação

a) $(3, -2, 4)$ b) $(5, 2, 12)$ c) $(2, -3, 4)$

319 Dada a equação $x - 2y + z = 4$ e as triplas $(a, 2, 5)$, $(3, b, -2)$ e $(-1, -3, c)$, determine **a**, **b** e **c** de modo que as triplas sejam soluções da equação dada.

320 Em cada item seguinte dizer se a ênupla dada é ou não solução da equação dada

a) $2x - 4y - 3z - w = 7$, $(0, -1, -2, 3)$
b) $3x - y + z = 3$, $(1, 2, 3)$
c) $x - 2y - 3z = -4$, $(5a - 1, a, a + 1)$
d) $2x - 3y - z = -10$, $(a - 1, a + 1, a + 1)$

321 Determine **a** de modo que $(a, a - 1, 2a - 1, a + 1)$ seja solução da equação dada, nos casos

a) $2x - 3y - 2z - w = -8$ b) $3x - 2y - 2z + 3w = 7$

322 Determine **a** de modo que $(3a,\ a-1,\ 3a-1)$ seja solução da equação $2x - 3y - z = 7$

323 Verifique se a ênupla dada é solução do sistema dado nos casos:

a) $\begin{cases} 2x-3y=-8 \\ x+3y=5, \end{cases}$ $(-1,2)$

b) $\begin{cases} 3x-y=-9 \\ x-2y=-8 \\ x+2y=5, \end{cases}$ $(-2,3)$

c) $\begin{cases} x+2y-z=-4 \\ x-2y+z=2 \\ 2x-y-2z=-8, \end{cases}$ $(-1,0,3)$

d) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-z=6 \\ y-z=-1, \end{cases}$ $(3,-1,0)$

e) $\begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 2x+3y-2z=-10, \end{cases}$ $(7a-14,-4a+6,a), a \in R$

324 Dado o sistema

$\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+3y-4z=-2 \end{cases}$ dizer se a ênupla dada em cada caso é ou não solução do sistema

a) $(17,-12,0)$ b) $(7,3,5)$ c) $(17-a,\ 2a-12,\ a)$

325 Em cada caso é dado um par ordenado (dupla) e um sistema. Determine a e b de modo que o par seja solução do sistema:

a) $\begin{cases} ax+3y=7 \\ x+by=-13, \end{cases}$ $(-1,3)$

b) $\begin{cases} 2x+ay=13 \\ 3x+by=3, \end{cases}$ $(2,-3)$

326 Determine a, b e c de modo que o sistema

$\begin{cases} 2x-ay-z=a+1 \\ x+by-z=c-3 \\ cx-y-6=b-9 \end{cases}$ seja homogêneo.

327 Escreva sob a forma de equação matricial o sistema dado nos casos:

a) $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 8x+y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x+2z=7 \\ 4y-5z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y-z=7 \\ 4x+7y+2z=9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-5y=-2 \\ x+3y=4 \\ 7x-y=6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 3y+5z=3 \\ 6z=1 \end{cases}$

328 Escreva o sistema cuja forma matricial é dada, nos casos:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

329 Dado o sistema

$\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 4x-5y=2 \end{cases}$, a matriz incompleta $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ desse sistema, obtem-se para inversa de A a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. Passando para o forma matricial, resolva o sistema.

330 Dados o sistema

$\begin{cases} -x+3y+3z=-12 \\ -x+2y+z=-7 \\ x+y+6z=-10 \end{cases}$ e as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -15 & -3 \\ 7 & -9 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,

utilizando a equação matricial correspondente, resolva o sistema.

331 Dizer se o sistema dado em cada caso é normal ou não:

a) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x-5y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-6y=10 \\ 6x-9y=15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+6y=7 \\ 4x+8y=13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 2y-3z=24 \\ x+z=36 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-3y-z=3 \\ 4x+y+5z=8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-3y-z=3 \\ x+2y-3z=4 \\ 2x-y-4z=7 \end{cases}$

332 Determine a de modo que o sistema seja normal nos casos:

a) $\begin{cases} (a+2)x-y-z=-4 \\ ax+y+z=4 \\ 2x+y \quad =1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax+2y+(2a+1)=7 \\ x+(a+1)y+(a-2)z=0 \\ -x+(a-1)y-5z=1 \end{cases}$

333 Para resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11 \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40 \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37 \end{cases}$$

foram achados o determinante do sistema $D=-3$ e os seguintes determinantes: $D_1=-3$, $D_2=-6$, $D_3=-6$ e $D_4=0$.
Utilizando a regra de Regra de Cramer, ache a a solução do sistema

334 Resolva pela Regra de Cramer os sistemas lineares normais seguintes:

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 4x-5y=23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=13 \\ 4x+y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y=-8 \\ 3x+2y=31 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-2y+z=11 \\ x-3y+z=10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4 \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_2+2x_3+3x_4=-2 \\ x_3+2x_4+3x_5=2 \end{cases}$

335 Resolva pela Regra de Cramer os sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y-7}{z-x}=1 \\ \dfrac{2x-y+2}{y+z}=2 \\ \dfrac{y+z-6}{y-x}=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}-\dfrac{5}{z}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

c) $\dfrac{x-y-3}{x-z}=\dfrac{x+z+4}{y-z}=\dfrac{y-z-3}{x+y}=2$

336 Determine a, b e c utilizando a regra de Cramer sabendo que $f(x)=ax^2+bx+c$ e que $f(1)=3$, $f(-1)=9$ e $f(2)=6$

337 Determine a para que o sistema

$\begin{cases} x+y+z=2a+2 \\ ax+y-z=a^2+a \\ (a+1)x-y-2z=a^2-3 \end{cases}$ seja normal e ache o conjunto-solução do sistema.

338 Determine a para que o sistema

$\begin{cases} -x+(a+4)y-2z=0 \\ x+2y+(a+8)z=0 \\ 4x+(a+4)y+az=0 \end{cases}$ seja normal e ache o seu conjunto-solução.

339 Dizer em cada caso se o sistema dado está escalonado ou não

a) $\begin{cases} 2x-3y+2z=1 \\ -2y+z=0 \\ 2z=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y-2z=0 \\ 2x-y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y-z+w=1 \\ 2y-z+w=2 \\ 2z+7w=1 \end{cases}$

340 Resolva os seguintes sistemas escalonados

a) $\begin{cases} x-3y=2 \\ y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=10 \\ 2y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 2y=-6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ y-2z=3 \\ z=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-3y+2z-w=10 \\ 3y-2z+2w=2 \\ 3z-2w=6 \\ 3w=0 \end{cases}$

341 Classifique em SPD, SPI ou SI os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} 2x+3y+4z=7 \\ 2y-3z=1 \\ 7z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y-7z=0 \\ 4y-8z=1 \\ 0z=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y+z-w=1 \\ 3y-z+2w=2 \\ 2z-7w=5 \end{cases}$

342 Ache o grau de indeterminação e resolva o sistema nos casos:

a) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ y-2z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-3y-2z-t=4 \\ z+t=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y-z+t=1 \\ y+2t=2 \\ z-3t=3 \end{cases}$

343 Resolva os sistemas

a) $\begin{cases} 2x-3y-z=7 \\ 2y-3z=0 \\ 2z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2y+7z=5 \\ 0z=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y-z+w=1 \\ -z+2w=5 \\ 2w=6 \end{cases}$

344 Discutir as seguintes equações, dando o seu conjunto-solução:

a) $ax = 7$ b) $(a-2)x = 5$ c) $ax = b$ d) $(a-2)x = b$
e) $ax = b - 7$ f) $(a-1)x = b + 1$ g) $(a-2)x = a - 2$
h) $(a-2)x = a + 2$ i) $(a-2)^2x = (a+1)(a-1)$
j) $a^2(x-1) + x = 2(a-x) + 1$
k) $a(ax-b) - a(x-3) = 2x + b - 3$

345 Discutir (SPD, SPI ou SI) os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-3y-z=1 \\ 4y-2z=2 \\ (a-3)z=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y-9z=1 \\ 3y-5z=7 \\ (a-1)z=a^2-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2y=6 \\ y=a+1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y+2z+w=7 \\ 2z-3w=8 \\ (a^2-1)w=a+1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} (a-3)x+2y-z=3 \\ 3y+2z=8 \\ (a^2-4)z=a+2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (a-3)x+2y-z=4 \\ 3y+2z=8 \\ (a^2-4)z=a+2 \end{cases}$

346 Resolver os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} x+y-z=a \\ 2y+3z=a+1 \\ (a-1)z=a-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{a}{a-1} \\ y-z=\dfrac{-2}{a^2-1} \\ (a^2-1)z=a+1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=3a \\ y-(a-1)z=-a^2+a \\ a^2z=a^3+a^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+2z=8a \\ y-2z=3a-3 \\ (a-1)z=a^2-1 \end{cases}$

347 Determine a e b, sabendo que os sistemas

$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+5y=-3 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2ax-by=3a+5 \\ 3ax-5by=5b+18 \end{cases}$$ são equivalentes.

348 Determine a, b e c de modo que os sistemas

$$\begin{cases} ax-2by+cz=9 \\ x+3by-az=c \\ 2ax-2by+3cz=17 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y-4z=0 \\ x+y-2z=5 \end{cases}$$ sejam equivalentes.

349 Transforme em sistema escalonados e classifique os sistemas:

a) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y+3z=8 \\ 2x+y-3z=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ 2x-3y-13z=7 \\ x-y-8z=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y-2z+w=1 \\ 3x-8y-9z+5w=5 \\ 2x-5y-5z+w=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 3x+10y+3z=5 \\ 4x+13y+7z=12 \\ 2x+6y+6z=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+3y-4z=3 \\ 2x+5y+(a-6)z=a^2+3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+(a+1)y-3z=2 \\ x+2ay-5z=3 \\ 2x+(3a+1)y+(a-7)z=a+4 \end{cases}$

350 Resolver, escalonando, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=-8 \\ x+3y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-4y=8 \\ x-2y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-4y=-6 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y=5 \\ 3x+2y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y-2z=-5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ 2x-y-z=3 \\ 3x-3y+2z=-4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ x-y+2z=-17 \\ 7x-10y-z=-5 \end{cases}$

351 Resolver por escalonamento os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+5z+2w=1 \\ 2x+3y+11z+5w=2 \\ 2x+y+3z+2w=-3 \\ x+y+3z+4w=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y-5z+w=3 \\ 2x-3y+z+5w=-3 \\ x+2y \quad -4w=-3 \\ x-y-4z+9w=22 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+z-w=3 \\ 4x-2y-2z+3w=2 \\ 2x-y+5z-6w=1 \\ 2x-y-3z+4w=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+7y+3z+w=5 \\ x+3y+5z-2w=3 \\ x+5y-9z+8w=1 \\ 5x+18y+4z+5w=12 \end{cases}$

352 Resolver os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3=0 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6=0 \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8=0 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4-2=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4-6=0 \\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4-3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x+5y-2z+4t+4=0 \\ 9x-y+4z-t-13=0 \\ 3x+4y+2z-2t-1=0 \\ 3x-9y+2t-11=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-y-6z+3t+1=0 \\ 7x-4y+2z-15t+32=0 \\ x-2y-4z+9t-5=0 \\ x-y+2z-6t+8=0 \end{cases}$

353 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1 \\ x + 3y - 6z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5 \\ 3x - 7y + 3z - t = -1 \\ 5x - 9y + 6z + 4t = 7 \\ 4x - 6y + 3z + t = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17 \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 18x_4 + 20x_5 = 14 \\ 10x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 24x_4 + 30x_5 = 18 \\ 12x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 27x_4 + 35x_5 = 32 \\ 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 15x_5 + 20x_5 = 16 \\ 4x + 5x_2 + 4x_3 + 15x_4 + 15x_3 = 11 \end{cases}$

354 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

355 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

356 Resolver os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$

357 (FEI-65) Discutir o sistema linear, nas incógnitas x e y

$\begin{cases} mx + y = 1 - m \\ x + my = 0 \end{cases}$

358 (ENE-39) Discutir o sistema

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ \dfrac{x}{a}+y+bz=1 \\ \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b}+z=1 \end{cases}$$

359 Determine a para que o sistema

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=a \end{cases}$$ seja possível.

360 Dado o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4x=2my+3z=0 \\ 2x+6y-4mz=0 \end{cases}$$ determine m para que o mesmo admita soluções distintas da trivial e determiná-las.

361 Discutir segundo λ (Não é necessário dar o conjunto-solução)

a) $\begin{cases} (5-\lambda)x_1-2x_2-x_3=1 \\ -2x_1+(2-\lambda)x_2-2x_3=2 \\ -x_1-2x_2+(5-\lambda)x_3=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x_1+(1+\lambda)x_2+(2-\lambda)x_3+\lambda x_4=3 \\ \lambda x_1-x_2+(2-\lambda)x_3+\lambda x_4=2 \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(2-\lambda)x_3+\lambda x_4=2 \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(2-\lambda)x_3-x_4=2 \end{cases}$

362 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-1 \\ 7x_1+6x_2+5x_3=\lambda \\ 5x_1+4x_2+3x_3=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ 5x_1+x_2-2x_3=2 \\ -2x_1-2x_2+x_3=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 24x_1-38x_2+46x_3=26 \\ 60x_1+\lambda x_2+115x_3=65 \\ 84x_1-133x_2+161x_3=91 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (3+2\lambda)x_1 + (1+3\lambda)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 = 3 \\ 3\lambda x_1 + (3+2\lambda)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 = 1 \\ 3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + 3x_3 + (\lambda-1)x_4 = 1 \\ 3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + \lambda x_3 + (\lambda-1)x_4 = 1 \end{cases}$

Exercícios Suplementares

363 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

364 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

365 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

366 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3 \end{cases}$

367 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

368 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 18 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$

369 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_2 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$

370 Resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1 \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1 \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1 \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2 \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1 \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7 \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=-2 \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=-3 \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=10 \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-5 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4+4x_5=1 \end{cases}$

371 Para que valores de **k** o sistema:

$\begin{cases} x+y=k \\ x+y=\text{sen}\,k \end{cases}$ é indeterminado?

é incompatível?

(POLI-58)

372 Obter **m** para que o sistema, nas incógnitas x, y, z, abaixo, seja compatível:

$$\begin{cases} x+my-(m+1)z=1 \\ mx+4y+(m-1)z=3 \end{cases}$$

(POLI-62)

373 Se abcd!0 determine **p** e **q** de modo que o sistema:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=d \end{cases}$$

seja indeterminado. (ITA-57)

374 Discutir o sistema:

$$\begin{cases} mx+y-z=4 \\ x+my+z=0 \\ x-y=2 \end{cases}$$

(ITA-53)

375 Determine o valor de **a** para que o sistema abaixo seja indeterminado:

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x+5y+az=0 \\ 3x+7y+z=0 \end{cases}$$

(IME-65)

376 Determinar os valores de **m** e **k**, de modo que seja possível e indeterminado o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-mz=-1 \\ 3x-y+z=4 \\ -2x+4y-2z=k \end{cases}$$

(ITA-63)

377 Determine o valor de x_3 que o satisfaz ao sistema de equação lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1(b+c+d) + x_2(a+c+d) + x_3(a+b+d) + x_4(a+b+c) = 0 \\ x_1(bc+bd+cd) + x_2(ac+ad+cd) + x_3(ab+ad+bd) + x_4(ab+ac+bc) = 0 \\ x_1 bcd + x_2 acd + x_3 abd + x_4 abc = B \end{cases}$$

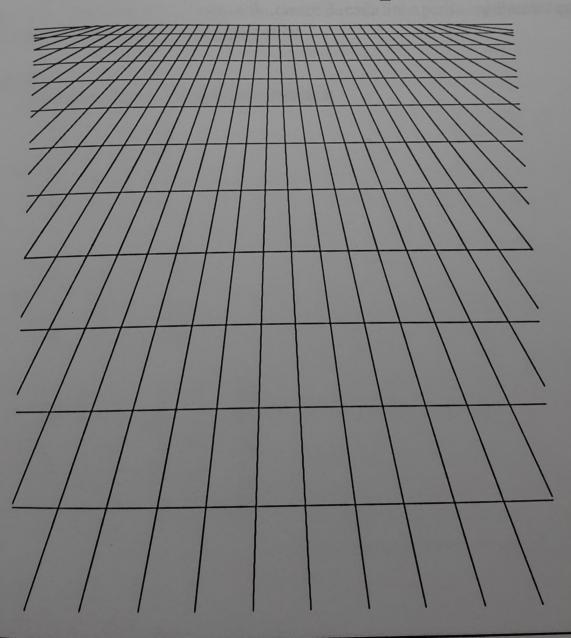
(IME-64)

378 Discutir os sistemas e resolvê-los quando determinados

a) $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x+y+z+t=1 \\ x+\lambda y+z+t=\lambda \\ x+y+\lambda z+t=\lambda^2 \\ x+y+z+\lambda t=\lambda^3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$

379 Se o sistema

$\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$ tem solução única, demonstre que $abcd\neq 0$ e ache o conujnto-solução.

Teorema de Rouché-Capelli

A - Introdução

Como mostramos no capítulo 3 deste livro, para resolver ou discutir um sistema linear, podemos escaloná-lo operando com suas equações ou com sua forma matricial. Neste apêndice estudaremos um outro modo para discutir sistemas lineares na sua forma matricial: através das **características** das matrizes completa e incompleta do sistema.

O método que veremos a seguir é absolutamente equivalente ao método do escalonamento de sistemas já abordado no capítulo 3 e, por isso, não proporemos, neste apêndice, novos exercícios sobre discussão de sistema a não ser aqueles necessários ao entendimento do novo método.

B - Escalonamento de uma matriz

Definição:

"Dizemos que uma matriz está escalonada quando o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo, cresce de cada linha para a seguinte até que, eventualmente, as linhas finais sejam nulas."

Exemplo:

Estão escalonadas, as seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B1 - Matrizes equivalentes por linhas

Definição:

"Dada a matriz A de ordem mxn, dizemos que a matriz B (mxn) é equivalente por linhas à matriz A se B for obtida a partir da aplicação de uma següência finita de operação elementares sobre as linhas de A".

As operações elementares são análogas àquelas usadas no escalonamento de sistemas:

1ª) Trocar as posições de duas linhas.
2ª) Multiplicar uma linha por $a \in \mathbb{R}^*$.
3ª) Multiplicar uma linha por $a \in \mathbb{R}^*$ e somar o resultado a uma outra linha.
Se A e B são equivalentes por linhas, indicamos:
$A \sim B$

Equivalentes, está definição nos permitírá que transformemos uma matrizA qualquer numa outra matriz B, escalonada e tal que A~B.

Exemplo:

Escalonar a seguinte matriz completa de um sistema linear:

$$[A,B]_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$L_1.(-2) \xrightarrow{+} L_2$$

$$L_1.(3) \xrightarrow{+} L_3$$

$$L_1.(-1) \xrightarrow{+} L_4$$

$$[A,B]_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right]$$

$$L_2.\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$L_4.\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$[A,B]_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$L_2.(1) \xrightarrow{+} L_3$$

$$[A,B]_4 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$L_3.\left(-\frac{1}{4}\right) \xrightarrow{+} L_4$$

$$[A,B]_5 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A matriz $[A,B]_5$ está escalonada e é equivalente por linhas à matriz $[A,B]_1$ dada inicialmente.

Observação:
É fácil observar que as matrizes equivalentes por linhas $[A,B]_1$ e $[A,B]_5$ do exemplo acima, são as correspondentes matrizes completas dos sistemas lineares equivalentes SL_1 e SL_2 seguintes:

$$SL_1 \begin{cases} 1x - 1y + 2z = -2 \\ 2x + 1y + 1z = 2 \\ -3x + 2y - 1z = 0 \\ 1x - 1y - 3z = 3 \end{cases} \quad e \quad SL_2 \begin{cases} 1x - 1y + 2z = -2 \\ 1y - 1z = 2 \\ 4z = -4 \end{cases}$$

B2 - Característica de uma matriz

Definição:

"Dadas as matrizes A e A_E de ordem mxn tais que A_E é uma matriz escalonada e A_N A_E (equivalentes por linhas) então chama-se **característica de A**, indica-se p(A), ao números de linhas não nulas de A_E."

Exemplos:

a) Sendo A uma matriz que, escalonada, resulta em $A_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ então

sua característica é p(A)=3.

b) Sendo B uma matriz que, escalonada, resulta em $B_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

então p(A)=4.

c) Sendo $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ então p(C)=0.

d) Sendo D uma matriz que, escalonada, resulta em $D_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ então

p(D)=2.

Observação:
Prova-se que a característica de uma matriz não se altera quando:
a) acrescentamos ou suprimimos filas nulas;
b) acrescentamos ou suprimimos uma fila que seja combinação linear de filas paralelas a ela.

B.3 - Teorema de Rouché-Capelli

Enunciado

"Seja o sistema linear de ordem m×n

$$SL \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e sejam A e [A,B], respectivamente, as

matrizes incompleta e completa do sistema.

Chamando de p a característica de A e de q a característica de [A,B] então o sistema linear SL é possível (ou compatível) se, e somente se, $q = p$."

Em símbolos:

$$\boxed{\text{SL é possível}} \Leftrightarrow \boxed{q=p}$$

Observações:

1ª) Como A é sub-matriz de [A,B], é imediato que sempre teremos $p < q$ ou $p = q$. Quando $p < q$ o sistema será impossível (ou incompatível)

2ª) Note que p(característica de A) coincide com o número de equações de SL depois de escalonada e, no caso em que p=q, teremos:

$p < n \Leftrightarrow$ sistema possível indeterminado

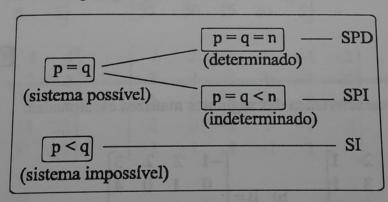
ou

$p = n \Leftrightarrow$ sistema possível determinado (n é o números de incógnitas de SL)

Relembrando que:

p=característica de A.

q=característica de [A,B]

n=número de incógnitas, teremos:

Exemplo:

Usando o teorema de Rouché-Capelli, classifique os seguintes sistemas lineares dados através de suas matrizes completas:

a) $[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Neste caso teremos:

$$\left.\begin{array}{l} p=3 \\ q=3 \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{SPD}$$

b) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Temos:

$\left.\begin{array}{l} p=3 \\ q=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$ SI

c) $[A,B]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Temos:

$\left.\begin{array}{l} p=2 \\ q=2 \\ n=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$ SPI com grau de indeterminação g.i. $= 4 - 2 = 2$

Exercício

380 Dar a característica das seguintes matrizes escalonadas:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

381 Escalone e, a seguir, dê a característica da matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -6 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

382 Dê as características das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

k) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ l) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

m) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ n) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

o) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

383 Usando o teorema de Rouché-Capelli, classifique os sistemas lineares seguintes, dados através de suas matrizes completas já escalonadas:

a) $[A,B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ b) $[A,B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

c) $[A,B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ d) $[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

e) $[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ f) $[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

g) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

h) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

i) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right]$

j) $[A,B]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$

384 Discutir, em função do parâmetro $a \in R$, a característica da matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & a^2+a-2\\0 & 0 & a^2-1\end{bmatrix}$$

Observação importante: Resolvendo estes exercícios, percebe-se que escalonada a matriz completa de um sistema e, a seguir, determinados os valores de p e q, pode-se classificar ou discutir esse sistema linear, qualquer que seja ele, usando-se o teorema de Rouché-Capelli.
Apresentamos, a seguir, alguns exercícios retirados de exames vestibulares menos recentes que são ótimos exemplos de aplicação da teoria estudada neste apêndice.

385 (EPUSP-58)

a) O que é característica de uma matriz?
b) Qual é a característica da matriz abaixo?

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

386 (ITA-64)Qual o valor máximo da característica de uma matriz 3x4?

387 (ITA-62) Justificando a resposta, calcular a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

388 (FAU-USP-65) Enunciar o teorema de Rouché-Capelli

389 (EPUSP-59) Apresente 3 valores de **a** para os quais o sistema

$\begin{cases} x+y=a \\ a^2x+y=a \end{cases}$ seja respectivamente indeterminado, incompatível e determinado.

390 (FAU-USP-69) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} mx+y=2 \\ x-y=m \\ x+y=2 \end{cases}$$

391 (EESC-USP-66) Dado o sistema

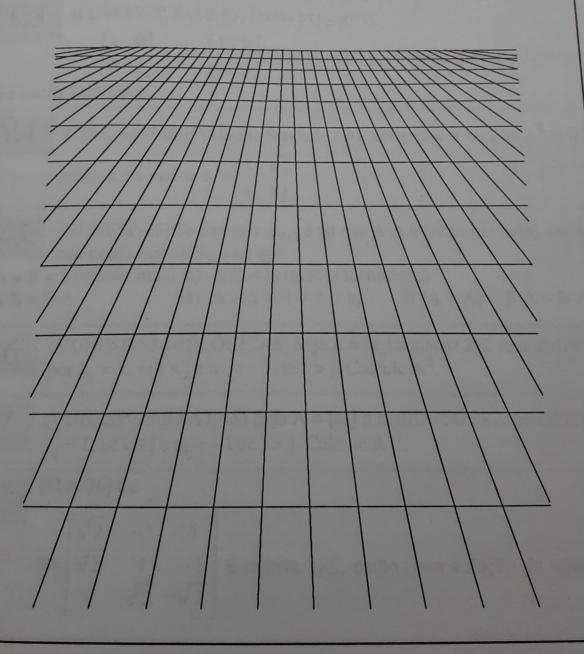
$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+a^2y+z=a^2 \\ 2x+2y+(3-a)z=b^2 \end{cases}$. Para que valores de **a** e **b** este sistema é:

a) possível;
b) simplesmente indeterminado;
c) duplamente indeterminado.

Justifique as respostas utilizando o teorema de Rouché.

392 (ENE-54) Discutir o sistema

$\begin{cases} x+z=p \\ y+z=100 \\ -mx+z=80 \end{cases}$ em relação a **m** e **p**.

Testes e Questões de Vestibulares

V.1 (FUVEST-1ª-FASE-77) Considere as matrizes:

1) $A = (a_{ij})$, 4×7, definida por $c_{ij} = i - j$
2) $B = (b_{ij})$, 7×9, definida por $b_{ij} = i$
3) $C = (c_{ij})$, $C = AB$

O elemento c_{63}

a) é –112 b) é –18 c) é –9 d) é 112 e) não existe

V.2 (FUVEST-2ª-FASE-80) É dada a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule P^2 e P^3 b) Qual a expressão de P^n? Prove por indução.

V.3 (FUVEST-2ª-FASE-83) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, determine a e b, de modo que $AB = I$, onde I é a matriz identidade.

V.4 (UNICAMP-2ª-FASE-88) Supondo $a \neq 0$, determine x tal que $A^2 = 0$,

onde A é a matriz $A = \begin{bmatrix} a & a \\ x & x \end{bmatrix}$.

V.5 (VUNESP-85) Se a matriz $A_{2\times2}$ é tal que $A \cdot A = 0$ (matriz nula), então não existe matriz $B_{2\times2}$ tal que:

a) $A + B = 0$ (matriz nula) b) $A \cdot B = I_2$ (matriz identidade)
c) $A \cdot B = B \cdot A$ d) $A + B = B + A$ e) $B \cdot (A + A) = B \cdot A + B \cdot A$

V.6 (VUNESP-93-BIOLÓGICAS) Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz 2×2 real, definida por $a_{ij} = 1$, se $i \leq j$ e $a_{ij} = -1$, se $i > j$. Calcule A^2.

V.7 (VUNESP-93-EXATAS) Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz real 2×2, definida por $a_{ij} = 1$, se $i \leq j$ e $a_{ij} = -1$ se $i > j$. Calcule A^{-1}.

V.8 (ITA-76) Se

$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é matriz 3×3, então uma solução da equação

$(P + X)^2 = P^2 + X^2 + 2PX$ é:

a) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ e) n.d.a.

V.9 (ITA-77) Seja

$X = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada 2×2, onde m é um número inteiro qualquer. Se $P = (a_{ij})$ é uma matriz definida por $P = X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X$, onde n é um número inteiro positivo $(n \geq 1)$, então podemos afirmar que:

a) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m\frac{n(n+1)}{2}$

b) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m\frac{n(n-1)}{2}$

c) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $n\frac{m(m-1)}{2}$

d) P é uma matriz cujos elementos são todos inteiros, se, e somente se, m é par;

e) n.d.a.

V.10 (ITA-79) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, temos:

a) $BA = I$ b) $BA = AB$ c) $A = 2B$ d) $AI = Z$ e) n.d.a.

V.11

(ITA-79) Seja a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -22 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Podemos afirmar:

a) a equação tem uma e somente uma solução;

b) a equação tem duas e somente duas soluções;

c) a equação tem três e somente três soluções;
d) a equação não tem solução e) n.d.a.

V.12 (ITA-80) Sejam A, B e C matrizes reais quadradas de ordem n e 0_n a matriz nula, também de ordem n. Considere as afirmações:

1) $AB = BA$
2) Se $AB = AC$, então $B = C$
3) Se $A^2 = 0_n$, então $A = 0_n$
4) $(AB)C = A(BC)$
5) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

A respeito destas afirmações, qual das alternativas abaixo é verdadeira?

a) Apenas a afirmação 1 é falsa
b) Apenas a afirmação 4 é verdadeira
c) A afirmação 5 é verdadeira
d) As afirmações 2 e 3 são verdadeiras
e) As afirmações 3 e 4 são verdadeiras

V.13 (ITA-82) Sejam A, B e P matrizes reais quadradas de ordem n, tais que $B = P^tAP$. Sendo P inversível, dentre as afirmações abaixo, qual é a falsa?

a) Se B é simétrica, então A é simétrica;
b) Se A é simétrica, então B é simétrica;
c) Se A é inversível, então B é inversível;
d) Se B é inversível, então A é inversível; e) n.d.a.

V.14 (ITA-83) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde $a = 2^{(1+\log_2 5)}$, $b = 2^{\log_2 8}$, $c = \log_{\sqrt{3}} 81$ e $d = \log_{\sqrt{3}} 27$. Uma matriz real quadrada B, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2, é:

a) $\begin{bmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27 & 2 \\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \log_2 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \log_2 5 & 3\log_{\sqrt{3}} 81 \\ 5 & -2^{\log_2 81} \end{bmatrix}$

V.15 (ITA-85) Dizemos que um número real λ é um auto valor de uma matriz real $T_{n\times n}$ quando existe uma matriz coluna $X_{n\times 1}$ não nula, tal que $TX = \lambda X$. Considere uma matriz real $P_{n\times n}$ satisfazendo $PP = P$. Denote por λ_1 um auto valor de P e por λ_2 um auto valor de PP. Podemos afirmar que, necessariamente:

a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ b) $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$ c) λ_1 e λ_2 pertencem ao conjunto $\{0,1\}$
d) λ_1 e λ_2 pertencem ao conjunto $\{t \in R$ tal que $t < 0$ ou $t > 1\}$
e) λ_1 e λ_2 pertencem ao intervalo aberto $\{0,1\}$

V.16 (ITA-89) Sendo

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$$, então o elemento da terceira linha e primeira coluna, de sua inversa, será igual a:

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{9}{11}$ c) $\frac{6}{11}$ d) $-\frac{2}{13}$ e) $\frac{1}{13}$

V.17 (ITA-91) Sejam M e B matrizes quadradas tais que $M - M^{-1} = B$. Sabendo que $M^t = M^{-1}$, podemos afirmar que:

a) B^2 é a matriz nula b) $B^2 = 2I$ c) B é simétrica
d) B é anti-simétrica e) n.d.a.

Notações: M^t e M^{-1} denotam, respectivamente, a matriz transposta de M e a matriz inversa de M. Por I denotamos a matriz identidade de ordem n.

V.18 (ITA-93) Dadas as matrizes reais:

$$A=\begin{bmatrix}2 & x & 0\\ y & 8 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}2 & 3 & y\\ 0 & 8 & 2\\ x & 3 & x-2\end{bmatrix}$$ analise as afirmações:

I) $A = B \Leftrightarrow x = 3$ e $y = 0$ II) $A+B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\ 1 & 16 & 4\\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow x=2$ e $y=1$

III) $A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow x=1$ e conclua:

a) Apenas a afirmação II é verdadeira b) Apenas a afirmação I é verdadeira
c) As afirmações I e II são verdadeiras d) Todas as afirmações são falsas
e) Apenas a afirmação I é falsa

V.19 (MAPOFEI-70) Sendo A, I e Z as matrizes quadradas

$$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & 1\end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad Z=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

a) calcular o produto AI
b) para que valores de λ existe uma única matriz quadrada

$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que AM = I?

c) para que valores de λ existe uma infinidade de matrizes M tais que AM = Z?

V.20 (MAPOFEI-73) Prove que, se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n, tais que AB + BA = 0, então as matrizes A e B^2 comutam. $(AB^2 = B^2A)$.

V.21 (MAPOFEI-76) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sendo A^t a trasposta de A, calcular A^tB.

V.22 (FEI-92) Dados o número k natural, múltiplo de 4, e a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que $A^{k+3} - A$ é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} k & -k \\ 0 & -k \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} k+1 & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$

V.23 (Santa Casa-80) Se uma matriz quadrada A é tal que $A^t = -A$ ela é chamada matriz anti-simétrica. Sabe-se que M é anti-simétrica e

$$M = \begin{bmatrix} 4+a & \cdots & \cdots \\ a & b+2 & \cdots \\ b & c & 2c-8 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Os termos a_{12}, a_{13} e a_{23} da matriz M valem, respectivamente:

a) –4, –2 e 4 b) 4, 2 e –4 c) 4, – 2 e – 4 d) 2, – 4 e 2 e) n.d.a.

V.24 (FFCLUSP-69) Consideremos o conjunto S de todas as matrizes quadradas 2×2 que podem ser escritas sob a seguinte forma: $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (θ real qualquer). Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) a soma de 2 matrizes quaisquer que pertençam a S ainda pertence a S

b) o produto de qualquer matriz por si mesma, pertence a S

c) a inversa de qualquer matriz de S existe e está em S

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a S e) n.d.a.

V.25 (CESCEM-71) Dada uma matriz $A_{m \times n}$ e as operações:

1) +/A que transforma a matriz A numa outra matriz $A'_{m\times 1}$ onde cada elemento da única coluna de A' é obtido somando-se os elementos da linha correspondente de A.
2) +⁄A que transforma a matriz $A_{m\times n}$ numa outra $A''_{1\times n}$ onde cada elemento da única linha de A'' é obtido somando-se os elementos da coluna correspondente de A.
Nestas condições, se A for a matriz identidade de ordem p, a expressão +/(+⁄A) vale:

a) 2 b) p c) p^2 d) pm e) pn

V.26 (CESCEM-71) Define-se distância entre duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, quadradas e de mesma ordem, pela fórmula:
$d(A;B) = \max |a_{ij} - b_{ij}|$, i, j = 1, 2, ..., n.

Assim, a distância entre as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ é:

a) –5 b) –3 c) 0 d) 3 e) 5

V.27 (CESCEM-78) A matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})$, de tipo 3×2, onde $a_{ij} = 2i - 3j$, é igual a:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

V.28 (CESCEM-73) Dada a equação matricial $X_2 - 2X = O$, onde X é uma matriz quadrada m×m, não singular. Podemos afirmar que esta equação:

a) tem uma infinidade de soluções. b) não tem solução.
c) tem duas soluções distintas d) tem uma única solução.

e) admite a solução $X = \begin{pmatrix} 2 \cdots 2 \\ \cdots\cdots \\ 2 \cdots 2 \end{pmatrix}$

V.29 (MACK-73) A matriz inversa de A é

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -1 & -10 \\ 13 & -1 & -8 \\ 11 & -1 & -7 \end{bmatrix}$. A segunda linha de A é:

a) (1 1 1) b) (3 –2 –2) c) (2 1 –3) d) (0 0 –1) e) (2 –2 3)

V.30 (CESCEA-76) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definimos: $A^o = I$ e $A^n = A^{n-1}$. A para todo número natural n, com $n \geq 1$. Então:

a) $A^n = I$, para todo natural n.
b) $A^{2n} = A$, para todo natural n.
c) $A^{2n} = I$ e $A^{2n+1} = A$, para todo natural n.
d) $A^{2n+1} = I$, para todo natural n.
e) $A^n = I$ se, e somente se, $n = 0$

V.31 (PUC-76) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, então a matriz X, de ordem 2, tal que $(XA)^{-1} = B$ é:

a) $\frac{1}{165}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$
b) $\frac{1}{165}\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$
c) $\frac{1}{165}\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$
d) $\frac{1}{165}\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$
e) $\frac{1}{165}\begin{bmatrix} 7 & 15 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$

V.32 (FEI-77) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine $X = (AB^{-1})^t$

V.33 (FAAP-78) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, achar a matriz B tal que $AB = I$, sendo I a matriz identidade de 2ª ordem.

V.34 (MACK-78) A é uma matriz m×n e B é uma matriz m×p.
A afirmação falsa é:

a) A + B existe, se, e somente se, n = p.
b) $A = {}^tA$ implica m = n (${}^tA$ = transposta de A)
c) A·B existe, se, e somente se, n = p
d) $A \cdot {}^tB$ existe, se, e somente se, n = p
e) ${}^tA \cdot B$ sempre existe

V.35 (FATEC-89) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, conclui-se que a matriz

a) AB é nula
b) A^2 é nula
c) BA é não-nula
d) B^2 é nula
e) A + B é nula

V.36 (FAAP-89) Ache a soma dos elementos da última linha da inversa da matriz $M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

V.37 (FZL-89) Se

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$, então podemos afirmar que:

a) $AB = BA$
b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
c) $A = A^{-1}$
d) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
e) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

V.38 (FZL-89) Se a matriz

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é comutável com $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ na multiplicação, então:

a) $c = 0$ e $a = b + d$
b) $c = 0$ e $a = 3b - d$
c) $c = 0$ e $a = d - b$
d) $c = 0$ e $a = -3b + d$
e) $c = 0$ e $a = b - d$

V.39 (PUCAMP-90) A inversa da matriz

$\begin{bmatrix} x & 7 \\ 5 & y \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$. Nesse caso, é correto concluir que:

a) $x = -9$ e $y = -4$
b) $x = 4$ e $y = 9$
c) $x = 9$ e $y = 4$
d) $x = 3$ e $y = 2$
e) $x = y = 36$

V.40 (OSEC-90) Dada a matriz

$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, conclui-se que A^3 resulta na matriz:

a) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 64 & -8 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 64 & 8 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

V.41 (OSEC-90) Dadas as matrizes A, B e C, de tipos $m \times n$, $r \times s$ e $t \times u$, respectivamente, é possível determinar-se a matriz $AB + BC$ se, e somente se,

a) $n = r$ e $s = t$
b) $m = n = r$ e $s = t = u$
c) $m = n = t$ e $s = r = u$
d) $n = r$, $t = u$ e $m = s$
e) $m = n$, $r = s$ e $t = u$

V.42 (OSEC-90) Os números reais x, y e z que tornam verdadeira a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 24 \\ 10 \end{bmatrix}$$ são tais que sua soma é um número

a) primo
b) divisível por 3
c) múltiplo de 7
d) quadrado perfeito
e) cubo perfeito

V.43 (PUCAMP-91) Dada a matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que a matriz A^{1991} é igual

a) à transposta de A
b) à matriz identidade
c) à matriz nula
d) à matriz A
e) à oposta de A

V.44 (FAAP-91) Resolva a equação:

$$\begin{bmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2x^2-3y \\ 2x-y-2 & 11 \end{bmatrix}$$

V.45 (FAAP-91-HUMANAS) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $AB + B^t$

V.46 (F.M.U.-91) Dada a matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$, calcule a e b, de modo que $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$

V.47 (UNIFAAP-92-EXATAS) Dadas as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -9 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz X tal que $7X = 2A + B^t$

V.48 (MACK-93-HUMANAS) O número de matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ onde

$$a_{ij} = \begin{cases} x \text{ para } i = j \\ y \text{ para } i \neq j \end{cases}$$ tais que $A = A^{-1}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

V.49 (OSEC-93) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcular $C = B - 2A$.

Qual é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz C?

a) 4 b) 2 c) 1 d) –3 e) –4

V.50 (FATEC-93) Sejam

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 0 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$. Se $AX = B$, então X é:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

V.51 (CESCEM-69) Sabe-se que as matrizes A e B comutam (i.e.$AB = BA$) e que seu produto é não singular. Pode-se, então, afirmar:

a) A e B são quadradas de mesma ordem e, se p e q forem dois inteiros quaisquer, então A^p e B^q comutam e são não singulares.

b) A e B têm mesmo número r de linhas e mesmo número s de colunas mas, eventualmente, $r \neq s$

c) A e B são não singulares, mas existem inteiros p e q tais que A^p e B^q são singulares.

d) A^p e B^q são sempre não singulares mas, eventualmente não comutam

e) n.d.a.

V.52 (FUVEST-1ª-FASE-77) A matriz

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 & 1 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ é inversível se, e somente se,

a) $\theta \neq n\pi, n \in Z$ b) $\theta \neq 2n\pi, n \in Z$ c) $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ d) $\theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$
e) $\theta \in R$

V.53 (FUVEST-1ª-FASE-78) O determinante da matriz

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, onde $2a = e^x + e^{-x}$ e $2b = e^x - e^{-x}$, é igual a

a) 1 b) −1 c) e^x d) e^{-x} e) 0

V.54 (FUVEST-2ª-FASE-78) O produto da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & y \end{bmatrix}$$ pela sua transposta é a identidade. Determine x e y,

sabendo que $\det A > 0$.

V.55 (FUVEST-2ª-FASE-78) Dizemos que um número x é soma de dois quadrados se existem inteiros a e b tais que $x = a^2 + b^2$.
Prove que, se dois números são somas de dois quadrados, seu produto também o é.

Sugestão: $a^2 + b^2 = \det \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

V.56 (FUVEST-1ª-FASE-79) O número de raízes da equação

$$\begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ é}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

V.57 (FUVEST-1ª-FASE-81) Uma matriz $m \times n$, $n > 2$, é constituída de "zeros" e "uns", de forma que em cada linha e em cada coluna haja exatamente um "um". O determinante dessa matriz é necessariamente:

a) 0 ou 1 b) 1 ou –1 c) 0 ou –1 d) n ou –n e) n – 1 ou 1 – n

V.58 (FUVEST-2ª-FASE-84) Calcule os determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ a & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

V.59 (FUVEST-1ª-FASE-85) A é uma matriz quadrada de ordem 2, inversível, e det(A) o seu determinante. Se $\det(2A) = \det(A^2)$, então det(A) será igual a:

a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) 4 e) 16

V.60 (FUVEST-2ª-FASE-85) É dada a função

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -3 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

a) Escreva p(x) na forma de um polinômio. b) Determine as raízes de p(x).

V.61 (FUVEST-87) Uma matriz 3×3 não nula A satisfaz $A + {}^tA = O$ (${}^tA$ = trasposta de A).

a) Calcule o determinante de A. b) Determine a característica de A.

V.62 (UNICAMP-1ª-FASE-87)Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2-x & 1 & -3 \\ -7 & -3-x & 9 \\ 0 & 3 & 1-x \end{bmatrix}$$

a) Para que valor de x a terceira linha é igual à soma das duas primeiras?
b) Ache as raízes da equação $\det A = 0$

V.63 (UNICAMP-2ª-FASE-89) Determine todas as raízes da equação do 3º grau:

$$\det \begin{bmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & x+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

V.64 (IME-65) Calcular o valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

V.65 (ITA-67) Seja o detrminante

$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ e A_1, A_2, A_3, respectivamente, os complementos algébricos de c_1, c_2, c_3. Então $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 =$

a) D b) $-D$ c) 0 d) D^{-1} e) 1

V.66 (ITA-69) Sejam

$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ e $Y=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ matrizes quadradas 2×2. Uma das afirmações abaixo é verdadeira, assinale-a:

a) $X\cdot X=\begin{bmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 \end{bmatrix}$ b) $\det(dX) = \alpha \det X$ c) $\det(X+Y) = \det X + \det Y$

d) $\det(\alpha X) = \alpha^2 \det X$ e) $\det(XY) = \det X + \det Y$

V.67 (ITA-71) Qual o resto da divisão por 3 do determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ (3-4) & (6-1) & (-3-5) & (9+6) \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

a) 0 b) 3 c) 7 d) 1 e) n.d.a

V.68 (ITA-75) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, tal que $A^{-1} = A^t$. Se $\det A = 1$, dizemos que A é uma matriz de rotação e se $\det A = 1$, A é uma matriz de reflexão.

Apoiados em tais definições, podemos dizer que:

a) se n é ímpar, o produto de duas matrizes de reflexão é de reflexão;

b) a soma de duas matrizes de rotação é de rotação;

c) o produto de duas matrizes de rotação é de rotação;

d) a matriz inversa de toda matriz de rotação é de reflexão; e) n.d.a

V.69 (ITA-75) Sejam as matrizes reais

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ e **m** um número real. Seja $AX = mX$.

Então podemos afirmar que:

a) se $\det (A - mI) \neq 0$, então $x + y = 0$ e $xy \neq 0$;
b) se $\det(A - mI) = 0$, então existem dois números reais x,y tais que $x + y \neq 0$ ou $xy \neq 0$;
c) se $\det (A - mI) = 0$, então $\det A = 0$ e $m = 0$;
d) se $\det A = 0$, então não existem dois números reais x,y tais que $AX = mX$;
e) n.d.a.

V.70 (ITA-76) Seja Q uma matriz 4×4, tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = O$. Então temos:

a) $\det Q = 2$ b) $\det Q = -2$ c) $\det Q = -16$ d) $\det Q = 16$ e) n.d.a.

V.71 (ITA-76) Consideremos a matriz 3×3,

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}.$$ Sabendo que $M\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, então temos:

a) detM é um número positivo

b) existe uma matriz P,3×3, tal que $MP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $M_{21} = -3M_{22} - 2M_{23}$
d) se $M_{21} = 3M_{22} + 2M_{23}$, então $M_{21} \neq 0$ e) n.d.a.

V.72 (ITA-78) Sejam a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$, k é real, $k \neq \frac{1}{2}$, e a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ de razão $q > 0$, $a_i = q^{i-1}\det A$, $i = 1,2,3,...n$. Se $a_3 = \det B$, com $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{k}{3} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e a soma dos 16 primeiros termos desta progressão geométrica é igual a $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}$, podemos dizer que:

a) $k = 1 - 3^{-8}$ b) $k < 0$ c) $k = 1 + 3^{-8}$ d) $k \geq 0$ e) n.d.a.

V.73 (ITA-79) Sejam A,B,C matrizes reais 3×3, satisfazendo às seguintes relações: $AB = C^{-1}$, $B = 2A$. Se o determinante de C é 32, qual é o valor do módulo do determinante de A?

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 8 e) 4

V.74 (ITA-80) Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz real quadrada de ordem 2 e I_2 a matriz identidade também de ordem 2. Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $\det(A - rI_2) = nr$, onde n é um número inteiro positivo, podemos afirmar que:

a) $r_1 + r_2 = a_{11} + a_{22}$
b) $r_1 + r_2 = -(a_{11} + a_{22})$
c) $r_1 + r_2 = n(a_{11} + a_{22})$
d) $r_1 \cdot r_2 = \det A$
e) $r_1 \cdot r_2 = -n\det A$

V.75 (ITA-81) Dizemos que uma matriz real quadrada A é singular se $\det A = 0$, ou seja, se o determinante de A é nulo; e não singular se $\det A \neq 0$. Mediante esta definição, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) a soma de duas matrizes A e B é singular, se $\det A = -\det B$;
b) o produto de duas matrizes é uma matriz singular, se, e somente, se ambas forem singulares;
c) o produto de duas matrizes é uma singular, se pelo menos uma delas for singular;
d) uma matriz singular possui inversa;
e) a transposta de uma matriz singular é não singular.

V.76 (ITA-82) Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de x na equação: $\det(2AA^t) = 4x$?

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

V.77 (ITA-84) Sejam P,Q,R matrizes reais arbitrárias de ordem n. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $PQ = PR$, então $Q = R$.
II. Se P^3 é a matriz nula, então o determinante de P é 0. III. $PQ = QP$.

Podemos garantir que:

a) I é a única afirmação verdadeira.
b) II e III são afirmações verdadeiras.
c) I e II são afirmações verdadeiras.
d) III é a única afirmação falsa.
e) I e III são afirmações falsas.

V.78 (ITA-86) Seja $x \in \mathbb{R}$ e A a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

. Se S é o conjunto dos x tais que A

é uma matriz inversível, então podemos afirmar que:

a) S é vazio b) $S=\left\{\frac{k\pi}{2}, k\in Z\right\}$ c) $S=\{k\pi,\ k\in Z\}$

d) $S=\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$ e) $S=[0,2\pi]$

V.79 (ITA-88) Seja A uma matriz real que possui inversa.
Seja n um número inteiro positivo e A^n o produto da matriz A por ela mesma n vezes. Das afirmações abaixo, a verdadeira é:
a) A^n possui inversa, qualquer que seja o valor de n.
b) A^n possui inversa apenas quando $n = 1$ ou $n = 2$.
c) A^npossui inversa e seu determinante independe de n.
d) A^nnão posui inversa para algum valor de n, $n > 1$.
e) Dependendo da matriz A , a matriz A^n poderá ou não ter inversa.

V.80 (ITA-89) Sendo A,B,C matrizes reais nxn,considere as seguintes afirmações :
1. $A(BC) = (AB)C$ 2. $AB = BA$ 3. $A + B = B + A$ 4. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
5. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
Então podemos afirmar que:
a) 1 e 2 são corretas. b) 2 e 3 são corretas c) 3 e 4 são corretas
d) 4 e 5 são corretas e) 5 e 1 são corretas

V.81 (ITA-90) Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} \text{sen}\, x & 2 \\ \log_3 10 & 2\text{sen}\, x \end{bmatrix}$$ onde x é real. Então podemos afirmar que:

a) A é inversível, apenas para $x > 0$ b) A é inversível, apenas $x = 0$
c) A é inversível, para qualquer x
d) A é inversível, apenas para x da forma $(2k + 1)\pi$, k inteiro.
e) A é inversível, apenas para x da forma $2k\pi$, k inteiro

V.82 (ITA-90) Sejam a, b e c matrizes quadradas n×n tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$,onde A^t é a transposta da matriz A.
Então podemos afirmar que:
a) C é inversível e $\det C = \det(AB)^{-1}$ b) C não é inversível, pois $\det C = 0$
c) C é inversível e $\det C = \det B$ d) C é inversível e $\det C = (\det A)^2 \cdot \det B$.

e) C é inversível e $\det C = \frac{\det A}{\det B}$

V.83 (ITA-91) Sejam m e n números reais com m≠n e as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Para que a matriz mA + nB seja não inversível é necessário que:

a) m e n sejam positivos.
b) m e n sejam negativos
c) m e n tenham sinais contrários
d) $n^2 = 7m^2$
e) n.d.a.

V.84 (ITA-90) Considere a equação:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0, \text{ onde } F(x) = \frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2} \text{ e}$$

$G(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, com $x \in R$, $x \neq 0$.

Sobre as raízes dessa da equação, temos:

a) Duas delas são negativas
b) Uma dela é um número irracional
c) Uma delas é número par
d) Uma delas é positiva e outra é negativa
e) n.d.a.

V.85 (ITA-92) Seja $C = \{X \in M_{2x2}, X^2 + 2X = 0\}$. Dadas as afirmações:

(I) Para todo $X \in C$, $(X + 2I)$ é inversível.

(II) Se $X \in C$ e $\det(x + 2I) \neq 0$, então X não é inversível.

(III) Se $X \in C$ e $\det X \neq 0$, então $\det X > 0$.

Podemos dizer que:

a) Todas são verdadeiras
b) Todas são falsas
c) Apenas (II) e (III) são verdadeiras
d) Apenas (I) é verdadeira
e) n.d.a.

V.86 (MAPOFEI-69) São dadas as matrizes

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix} \text{ e } X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$$

a) Efetuar o produto AX;

b) Sendo a, b, c, números reais quaisquer, mostrar que existe ao menos um valor real dos números λ para o qual a equação $AX = \lambda X$ tem solução não nula em X;

c) A que condição devem satisfazer os números a,b,c, para que a equação $AX = \lambda X$ tenha solução não nula em X para um só valor do número λ.

V.87 (IME-66) Determinar o valor numérico do detrminante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 & \log 7000 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 & (\log 7000)^2 \\ (\log 7)^3 & (\log 70)^3 & (\log 700)^3 & (\log 7000)^3 \end{vmatrix}$$

V.88 (MAPOFEI-75) Desenvolver o determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & b & -1 & 1 \\ 2 & c & 0 & -1 \\ 0 & d & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ pelos elementos da 2ª coluna.

V.89 (MAPOFEI-76) Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

V.90 (MAPOFEI-76) Determinar os valores de x para que o determinante da

matriz $\begin{pmatrix} 3 & 3 & x \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & x & 5 \end{pmatrix}$ seja nulo.

V.91 (VUNESP-84) O produto das matrizes

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz de determinante:

a) igual ao determinante de cada uma delas.

b) igual a zero.

c) menor que zero.

d) com valor absoluto menor que 1.

e) maior que o determinante de cada uma delas.

V.92 (VUNESP-91) Se a e b são raizes da equação

$$\begin{vmatrix} 2^x & 8^x & 0 \\ \log_2 x & \log_2 x & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$, onde $x > 0$, então $a + b$ é igual a:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{4}{5}$

V.93 (EPUSP-61) Supondo positivos os elementos literais da matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e sendo n múltiplo de 4, qual é o sinal do determinante correspondente?

V.94 (EPUSP-62) Prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{sen } x & \text{sen } y & \text{sen } z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = \text{sen}(x-y) + \text{sen}(y-z) + \text{sen}(z-x)$$

V.95 (FEI-67) Seja M uma matriz quadrada de 3ª ordem; constrói-se uma nova matriz N em que cada coluna é a soma das outras duas colunas de M. Sendo A o determinante de M e B o determinante de N, tem-se:

a) $B = 0$ b) $B = A$ c) $B = 2A$ d) $A = 2B$ e) n.d.a.

V.96 (EPUSP-67) Acrescentando-se a unidade a cada um dos elementos da

matriz $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$ o determinante:

a) não se altera b) aumenta de 1 c) aumenta de 4
d) fica multiplicado por 2 e) n.d.a.

V.97 (FEI-68) Seja M a matriz quadrada de 3ª ordem em que $a_{ij} = 2i - j$. Então, o complemento algébrico do elemento a_{12} vale:

a) -4 b) 4 c) 0 d) 3 e) n.d.a.

V.98 (MACK-69) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2, então:

a) sempre $\det 2A = 2\det A$ b) sempre $\det (A)^2 = (\det A)^2$

c) $\det A = 0$, se, e somente se, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\det A = 1$, se, e somente se, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) sempre $A = \det A$

V.99 CESCEA-96) Os valores de a para os quais

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0 \text{ são tais que:}$$

a) $1 < a < 1$ b) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ c) $a < -2$ ou $a > 2$

d) $a < -\frac{1}{2}$ ou $a > \frac{1}{2}$ e) $a > \frac{1}{2}$

V.100 (CESCEA-70) O conjunto de todos os x para os quais

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8+x \end{vmatrix} = 0 \text{ é:}$$

a) $\{-2,-4,-7\}$ b) $\{-2,-3,-5\}$ c) $\{-3,-5,2\}$ d) $\{-3,-5,-8\}$ e) $\{-3,0,3\}$

V.101 (CESCEM-70) Dado o determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são termos de uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1, o valor do determinante:

a) independe de n b) independe de r c) independe de a_1

d) é uma função somente de n e a_1 e) independe dos valores de n, r e a_1

V.102 (CESCEM-70) Se A é uma matriz quadrada n×n, I é a matriz identidade de ordem n, então o determinante da matriz (A – xI) é um polinômio de grau n na variável x, cujas raízes são chamadas valores próprios de A. Então, os valores próprios da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ são:

a) 1;0;1 b) 0;1 c) 0; – 1;3 d) 0;3 e) n.d.a.

V.103 (GV-70) O conjunto solução da equação

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0 \text{ é}$$

a) {0;1;4;6} b) {1;2;3;4;5;6} c) {0;1;4;5} d) {0;1;2;3} e) n.d.a.

V.104 (CESCEA-71) Para que

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32 \text{ devemos ter:}$$

a) $x > 2$ b) $0 < x < 5$ c) $x < -2$ d) $x > 5$ e) não sei

V.105 (GV-71) O quadrado do valor de x que satisfaz a equação

$$\begin{vmatrix} \log_x 16 & \log_x 2 & \log_x 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, x > 0 \text{ e } x \neq 1 \text{ vale:}$$

a) 2 b) 4 c) 16 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

V.106 (GV-72) O valor do determinante associado à matriz

$$\begin{bmatrix} sen^2x & sen^2x & 0 \\ cos^2x & cos^2y & sen^2y \\ r^2 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \text{ é:}$$

a) r^2 b) $r^2 \cdot sen^4x$ c) $r^2 \cdot sen^2x \cdot cos^2y$ d) $r^2 \cdot sen^2x \cdot cos^2y \cdot sen^2y$ e) n.d.a.

V.107 (GV-72) O determinante

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \text{ é igual a:}$$

a) $\begin{vmatrix} bca & a & a^2 \\ acb & b & b^2 \\ abc & c & c^2 \end{vmatrix}$ b) $abc\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ c) $\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & c^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ e) n.d.a.

V.108 (PUC-72) Qual das afirmações abaixo é falsa? Dadas A e B matrizes de ordem n:

a) $det(A + B) = (detA) + (detB)$
b) $detA = detA^t$
c) $(detA)(detA^{-1}) = 1$
d) $det(AB) = (detA)(detB)$
e) $(detA)(detA^t) = (detA)^2$

V.109 (CESCEA-73) Sejam A, B, C matrizes quadradas de ordem n e R um número real qualquer. Considere as afirmações:

1: $A = R \cdot B \Rightarrow detA = RdetB$
2: $C = A + B \Rightarrow detC = detA + detB$
3: $C = A \cdot B \Rightarrow detC = detA \cdot detB$. Responda:

a) se 1, 2 e 3 forem falsas
b) se 2 e 3 forem falsas
c) se 1 e 2 forem falsas
d) não sei

V.110 (GV-73) Para que o determinante associado à matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & x-1 & 6 \\ 4 & 6 & 13 & 3 \\ 5 & -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$ seja nulo, x deve assumir o valor:

a) 6 b) 5 c) 7 d) 8 e) n.d.a.

V.111 (GV-73) Seja a raiz da equação

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$ Então, o valor de a^2 é:

a) 16 b) 4 c) 0 d) 1 e) 64

V.112 (FEI-73) Chama-se traço de uma matriz quadrada à soma dos elementos da diagonal principal. Sabendo que o traço vale 9 e o determinante 15, calcule os elementos x e y da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$:

a) 4 e 6 b) 1 e 3 c) 2 e 4 d) 3 e 5 e) n.d.a.

V.113 (IME-73) Calcule o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+M & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+N & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+P & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+R \end{vmatrix}$$ sendo $M = \log_a a^a$, $N = e^{\ln a}$,

$P = \log_{10} 10^{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$ e $R = (2a)^{2\log_a a}$.

V.114 (GV-74) O determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix} \text{ tem por valor:}$$

a) 0 b) 1 c) 90 d) 80 e) 122

V.115 (PUC-74) Se somarmos 4 a todos os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é D, então o determinante da nova matriz é:

a) 2D b) 3D c) 4D d) 5D e) 6D

V.116 (GV-75) O determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{1} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \binom{n+3}{1} \end{vmatrix} \text{ é igual a:}$$

a) 1

b) $\binom{n}{1}\binom{n+1}{1}\binom{n+2}{1}\binom{n+3}{1}$

c) 0

d) $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}$

e) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}$

V.117 (GV-75) Para que valores de a a equação

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & a & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ terá duas raízes reais iguais?}$$

a) $a \geq 1$ b) $0 \leq a \leq 1$ c) só para $a = 1$ d) $a < 0$ e) só para $a = 0$

V.118 (GV-75) Para que o determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ sen^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \log_3 y & 2 & \log_3 2 \end{vmatrix}$$ seja nulo, x real, 4x deve ser:

a) 36 b) 18 c) 6 d) 12 e) 16

V.119 (CESCEA-75) O determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ x & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ é igual a:

a) $(x^2+1)(x-1)$ b) $(x^4-1)(x+1)$ xc) $(x^3-1)(x-1)$
d) $(x^2-1)(x^2+2)$ e) $(x+2)(x^3-1)$

V.120 (PUC-76) O cofator do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ é:

a) 2 b) 1 c) –1 d) –2 e) 3

V.121 (FAAP-77) Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 \end{vmatrix}$$

V.122 (MED-ABC-77) Seja $S = (s_{ij})$ a matriz quadrada de ordem 3, onde

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i < j \\ i+j, \text{ se } i = j \\ i-j, \text{ se } i > j \end{cases}$$. Então, o valor do determinante de S é:

a) 0 b) 12 c) 24 d) 48 e) n.d.a.

V.123 (FEI-77) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcular o número real x, tal que $\det(A - xB) = 0$.

V.124 (CESCEM-77) Sendo x e y, respectivamente, os determinantes das matrizes não singulares $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix}$, então $\frac{y}{x}$ vale:

a) 36 b) 12 c) −6 d) −12 e) −36

V.125 (MACK-77) A matriz A é quadrada, de ordem 3, e tal que $a_{ij} + a_{ij} = 0$, $1 \leq i,\ j \leq 3$. Então,

a) se $A \neq 0$, $\det A > 0$
b) se $A \neq 0$, $\det A < 0$
c) $\det A = 0$
d) nada se pode afirmar sobre detA
e) não sei

V.126 (CESCEM-78) O valor de x na equação

$$\begin{vmatrix} 3 & y & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) $4y - 1$ b) $4y + 1$ c) $4y - 8$
d) $\frac{17}{2}$ e) 2

V.127 (CESCEM-78) A intersecção do conjunto solução da equação

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \text{ como intervalo } [0, 2\pi] \text{ é:}$$

a) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ b) $\left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ c) $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ d) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ e) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

V.128 (CESCEM-78) Os valores reais de x que satisfazem a inequação

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ x & 2 & -1 \\ x^2 & 2 & 1 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 2x^2 & 1 \\ x+7 & -1 \end{vmatrix} \text{ são:}$$

a) $x < -1$ ou $x > 3$ b) $x < -3$ ou $x > 1$ c) $x < -3$ ou $x > -1$
d) $-3 < x < -1$ e) $-1 < x < 3$

V.129 (CESCEM-78) Se

$$\begin{vmatrix} 1 & 24 & 9 \\ -\frac{1}{2} & 0 & k \\ -2 & \frac{2}{5} & -1 \end{vmatrix} = 10, \text{ então k é}$$

a) um número inteiro b) menor que –4 c) igual a $-\frac{5}{2}$

d) igual a $-\frac{53}{22}$ e) igual a $-\frac{83}{26}$

V.130 (GV-79) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 & (\log 2000)^2 \\ (\log 2)^3 & (\log 20)^3 & (\log 200)^3 & (\log 2000)^3 \end{vmatrix} \text{ é igual a:}$$

a) 2 b) 12 c) 20 d) 0 e) 1

V.131 (C.CHAGAS-79) O determinante da matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 3, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{se } i \neq j \\ 3i - j, \text{se } i = j \end{cases} \text{ é igual a:}$$

a) 0 b) 12 c) 24 d) 36 e) 48

V.132 (OSEC-80) Somando-se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ obtém-se:}$$

a) 840 b) –840 c) 600 d) – 600 e) 0

V.133 (PUCAMP-80) O conjunto solução da inequação

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0, \text{ é dado por:}$$

a) $]-2,1[$
b) $]-2,-1[\cup]1,2[$
c) $]-1,0[\cup]1,2[$
d) $]0,2[$
e) n.d.a.

V.134 (STA.CASA-80) Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } f(x) = -x^2 - x - 1, \text{ então } f\left(-\frac{1}{\det A}\right) \text{ vale:}$$

a) $-\frac{1}{4}$
b) $-\frac{3}{4}$
c) $-\frac{5}{4}$
d) -3
e) n.d.a.

V.135 (MACK-80) A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e $B = KA$. Sabe-se que $\det A = 1{,}5$ e $\det B^t = 96$. Então

a) $K = 64$
b) $K = 96$
c) $K = \frac{1}{4}$
d) $K = \frac{3}{2}$
e) $K = 4$

V.136 (MACK-80) A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k^2 & k^{-1} & 5 \\ k^2 & k^4 & k^{-2} & 25 \\ k^3 & k^6 & k^{-3} & 125 \end{bmatrix} \text{ não admite inversa, se:}$$

a) $k = 2$
b) $k = 3$
c) $k = 4$
d) $k = 5$
e) n.d.a.

V.137 (MACK-80) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a & 5 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ de determinantes não nulos. Então,}$$

para quaisquer valores de a, b e c, temos:

a) $\det A = 2\det B$
b) $\det A = \det B^t$
c) $\det A^t = \det B$
d) $\det B = 2\det A$
e) $\det A = \det B$

V.138 (MACK-80) Se

$$\begin{vmatrix} \cos_2 x & \text{senx} \\ \text{asenx} & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{senx} & 0 \\ -1 & 2\cos x \end{vmatrix}, \text{ então:}$$

para todo $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, $K \in Z$, o valor de a é:

a) 2senx b) sec2x c) cos2x d) sen2x e) tg2x

V.139 (MACK-81) Sejam os números reais $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq f \neq 0$.

Então pode-se dizer que a matriz $\begin{bmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$

a) admite inversa, para qualquer x real.
b) admite inversa, para qualquer $x \neq 0$.
c) admite inversa, para qualquer x pertencente a $\{a,b,c,d,e,f\}$
d) não admite inversa, se, e somente se, x pertence ao conjunto $\{0,a\}$
e) não admite inversa, se, e somente se, x pertence ao conjunto $\{0,a,f,d\}$

V.140 (MACK-81) A e B são matrizes quadradas de ordem 2.
O determinante de A é 9. Se $B^{-1} = 2A$, o determinante de B é:

a) 9 b) $\frac{1}{9}$ c) 18 d) $\frac{1}{18}$ e) $\frac{1}{36}$

V.141 (STA.CASA-81) Seja a matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 3, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i < j \\ k, & \text{se } i = j \quad \text{e } k \in R. \\ -1, & \text{se } i > j \end{cases}$$

Se o detA é igual a zero, então:

a) $k \in \{-3,1,3\}$ b) $k \in \{-2,-1,2\}$ c) $k \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

d) $k \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$ e) $k \in \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$

V.142 (GV-81) O determinante de $(A_t \times B)$, sendo A_t = matriz transposta de

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ é:}$$

a) -65 b) 55 c) 202 d) -120 e) n.d.a.

V.143 (STA.CASA-82) Seja a matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem 2, tal que

$$a_{ij}=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2i-j}, & \text{se } i=j \\ \text{sen}\dfrac{\pi}{i+j}, & \text{se } i\neq j \end{cases}. \text{ O detA é igual a}$$

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 0 d) $-\frac{1}{4}$ e) $-\frac{3}{4}$

V.144 (MACK-84) Se

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}=0, \text{ então o valor de x é:}$$

a) 0 b) 1 c) -1 d) $-0{,}6$ e) $0{,}6$

V.145 (PUCAMP-84) Resolvendo a equação

$$\begin{vmatrix} 5 & -1+2x \\ 2x & 4 \end{vmatrix}=0, \text{ podemos dizer que:}$$

a) a equação não tem solução em R.

b) a soma das raízes é $\frac{1}{2}$ e seu produto é -5.

c) a soma das raízes é $-\frac{9}{2}$ e seu produto é -5.

d) a soma das raízes é $\frac{9}{2}$ e seu produto é 5.

e) a soma das raízes é $\frac{9}{2}$ e seu produto é -5.

V.146 (OSEC-84) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1+p & 1 & 1 \\ m & 1 & 1+r & 1 \\ m & 1 & 1 & 1+s \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) 4prs b) psr c) mps d) mprs e) 4mprs

V.147 (CESGRANRIO-84) Se $a_1, a_2, \cdots, a_q$ formam, nessa ordem, uma P. G. de razão q, então o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é:

a) 1 b) 0 c) $a_1^3 q^{13}$ d) $9a_1q^9$ e) $(a_1q)^9$

V.148 (PUC-85) O determinante

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \text{ representa o polinômio:}$$

a) $2x^3 + x^2 + 3$ b) $2x^3 - x^2 + 3$
c) $3x^3 + x - 2$ d) $2x^3 - x^2 - 3$ e) $2x^3 - x^2 + 3$

V.149 (MACK-85) Se detA = 5 e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & a \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \text{ então a é igual a:}$$

a) $-\frac{8}{5}$ b) 0 c) $\frac{1}{5}$ d) $-\frac{3}{5}$ e) $\frac{2}{5}$

V.150 (FAAP-86) Seja m o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 que têm um elemento nulo e os outros três, distintos dois a dois, pertencentes ao conjunto {1;2;3;4}. Pede-se:

a) achar o menor valor do determinante d de uma destas matrizes.
b) calcular o número m de matrizes do conjunto m.

V.151 (FEI-86) Se

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ x & x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{, então:}$$

a) $x = 1$ b) $x = 0$ c) $x = -2$ d) $x = -3$
e) não existe x que satisfaça

V.152 (FATEC-87) Se

$$x + y = \frac{\pi}{3}, \text{ então } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} y & \cos y & 0 \end{vmatrix} \text{ é igual a:}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

V.153 (FATEC-88) Os valores reais de x que satisfazem a equação

$$\begin{vmatrix} 2^x & 4^x & 8^x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ são números:}$$

a) pares b) irracionais c) inteiros consecutivos
d) inteiros negativos) racionais não inteiros

V.154 (GV-88) A matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \operatorname{sen} t \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ admitirá inversa, se, e somente se:}$$

a) $t \neq \pi h \ (h \in Z)$ b) $t = \pi h \ (h \in Z)$ c) $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi h (h \in Z)$

d) $t = \frac{\pi}{2} + \pi h (h \in Z)$ e) $t \neq 2\pi h \ (h \in Z)$

V.155 (GV-88) Considere a equação $\det(A - xI) = 0$, onde

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}, x \in R \text{ e } I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

A soma das raízes desta equação vale:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

V.156 (FEI-89) Sendo

$$A=\begin{bmatrix}-a^2 & -ab\\ ab & b^2\end{bmatrix}, \text{ onde } ab \neq 0, \text{ temos:}$$

a) $\det(A + A^t) = 0$

b) $\det(A + A^t) = -4a^2b^2$

c) $A^2 = 0$

d) $A^2 = I_2$, com $I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

e) $\det A^2 = 1$

V.157 (OSEC-89) Seja $A = (a_{ij})_{2\times2}$ a matriz definida por

$$a_{ij} = \begin{cases}1, & \text{se } i = j\\ -2, & \text{se } i \neq j\end{cases}$$. O determinante de A é:

a) 3 b) –2 c) 0 d) 5 e) 6

V.158 (PUC-89) Determine as possíveis medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC, isósceles em A, sabendo que o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \cos 2A & -\text{sen}A\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$ é igual a zero.

V.159 (FEI-90) O determinante da matriz

$$\begin{pmatrix}x+y+z & y & z\\ x+y+z & z & x\\ x+y+z & x & y\end{pmatrix}$$ é:

a) 0

b) $-x^3 - y^3 - z^3 + 3xyz$

c) $3xyz$

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

e) $x^3 + y^3 + z^3$

V.160 (PUC-90)
A)Calcule o determinante da matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1-x^2 & -1 & x+1 \\ 1+x^2 & 2+x & 4 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1-x \\ -x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$$,onde $x \in R$.

B)Quais os valores de x que anulam esse determinante?

V.161 (MACK-90) Se

$$\begin{vmatrix} 2^a & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4^a \end{vmatrix} \geq 128$$, então todos os valores de a pertencem a

a) $[2,\infty[$ b) $[8,\infty[$ c) R_- d) $[0,3]$ e) $[-2,2]$

V.162 (FEI-JUL/90) Seja a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

O valor de $y = \det(5A) + \det(A^5) - 25^3\det(A^{-1})$ é:

a) 5^{25} b) 5^{10} c) 25^2 d) 125^2 e) 25^y

V.163 (OSEC-90) Seja D o determinante de uma matriz quadrada A, de ordem 4. Se k é um número real não nulo, valor do determinante da matriz kA é:

a) 4kD b) 2kD c) kD d) k^2D e) k^4D

V.164 (MACK-91) Se

$$a=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ e } b=\begin{vmatrix} -2 & -6 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}$$, então podemos afirmar que:

a) $8a + b = 0$ b) $a - 2b = 0$ c) $a - 6b = 0$ d) $a - 8b = 0$ e) $a + 8b = 0$

V.165 (VUNESP-1ªFASE-91) S a e b são as raízes da equação

$$\begin{vmatrix} 2^x & 8^x & 0 \\ \log_2 x & \log_2 x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ onde } x > 0, \text{ então } a + b \text{ é igual a:}$$

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{4}{3}$

V.166 (MAUÁ-91) Calcular o determinante associado à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & b & c \\ a^n & a^{n+1} & a^{n+2} \end{bmatrix}$$

V.167 (FATEC-91) Se A é uma matriz quadrada de ordem n e I é a matriz identidade de ordem n, então det(A – xI) é um polinômio, na variável x, cujas raízes são chamadas auto-valores da matriz A. Determine os auto-valores da

$$\text{matriz } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 20 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

V.168 (FEI-91) A equação

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \text{ admite 2 como raiz dupla. A outra raiz é:}$$

a) ímpar b) um número primo c) um múltiplo de 3
d) um divisor de 6 e) um número negativo

V.169 (FAAP-EXATAS-91) Determine o valor de x na equação:

$$\begin{vmatrix} 2^x & -1 & 3 \\ 1 & 2^x & -2 \\ -3 & 2 & -2^x \end{vmatrix} = 0.$$

V.170 (FEI-92) Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ e uma matriz B, também quadrada de ordem 3.

Sabendo-se que $\det(AB) = -8$, podemos afirmar que:

a) $\det B = 64$
b) $\det B = -64$
c) $\det B = 8$
d) $\det B = -8$
e) é impossível calcular $\det B$

V.171 (MACK-92) Se

$$\begin{vmatrix} 0 & 2^x & 1 \\ 0 & 2^x & 2 \\ 4 & 2^x & 3 \end{vmatrix} = 1,$$ então x vale:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

V.172 (MACK-92) Se x é um número real positivo tal que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix} < 0,$$ então x pode ser:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{3}{2}$

V.173 (MACK-92) Sejam as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e seja x uma matriz tal que $xA = B$. Então, $\det x$ vale:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

V.174 (PUC-92) Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & 5 \\ k & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determine $k \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz A não admita inversa.

V.175 (MACK-93) Se

$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ é a inversa de uma matriz A, então o determinante de A vale:

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $-\frac{3}{7}$ d) 7 e) 49

V.176 (MACK-93) Quaisquer que sejam os números reais x e y tais que x > y > 0, o determinante $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & x & x \\ x & x & y & x \\ x & x & x & y \end{vmatrix}$ é:

a) nulo.
b) um número positivo
c) um número negativo
d) múltiplo de 3
e) múltiplo de x + y

V.177 (OSEC-93) A é uma matriz 3x3 e o determinante de A é k. Então, det(2A) é:

a) 8k b) 4k c) 2k d) k e) 0

V.178 (UNICID-93) O determinante da matriz de 2ª ordem $A = (a_{ij})$, tal que $a_{ij} = 2j + i^2$, é igual a:

a) 2 b) 4 c) –4 d) –6 e) -8

V.179 (FAAP-93) O determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \text{sen}\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \cos\alpha \\ 2 & 0 & \text{tg}\alpha \end{bmatrix}, \text{com } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } k \in N, \text{ é:}$$

a) $2\cos\alpha - 4$ b) $2\cos\alpha + 4$ c) $\frac{2\cos\alpha + 4}{\cos\alpha}$

d) $\frac{2}{\cos\alpha} + 4$ e) $\frac{2}{\cos\alpha} - 4$

V.180 (FEI-93) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) 0
b) 1
c) 2senx cosx
d) –2senx cosx
e) –1

V.181 (FUVEST-1ªFASE-93) O determinante da inversa da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ é:}$$

a) $-\frac{52}{5}$
b) $-\frac{48}{5}$
c) $-\frac{5}{48}$
d) $\frac{5}{52}$
e) $\frac{5}{48}$

V.182 (ITA-93) Sabendo-se que a soma das raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & b & x & x \\ b & x & 2 & b \end{vmatrix} = 0 - \frac{8}{3}$$ e que S é o conjunto destas raízes, podemos afirmar que:

a) $S \subset [-17, -1]$
b) $S \subset [1,5]$
c) $S \subset [-1,3]$
d) $S \subset [-10,0]$
e) $S \subset [0,3]$

V.183 (FUVEST-2ª FASE-89) Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x - y + mz = n \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$, nos seguites casos:

a) m = 0 e n = 0
b) m = -2 e n = 0
c) m = -2 e n = 5

V.184 (FUVEST-88) Qual a condição necessária e suficiente para que a solução do sistema linear $\begin{cases} x-4y=a \\ 6x+ky=b \end{cases}$ seja um par de números inteiros, quaisquer que sejam a e b inteiros?

a) $k=-23$
b) $k=23$ ou $k=-25$
c) $k=0$
d) $k=-23$ ou $k=-25$
e) $k=24$

V.185 (FUVEST-2ª FASE-86) Considere o sistema linear:

$$S: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

a) Prove que S é possível e indeterminado.
b) Encontre a solução geral de S

V.186 (FUVEST-85) O sistema linear

$$\begin{cases} x+\alpha y-2z=0 \\ x+y+z=1 \\ x-y-z=3 \end{cases}$$

não admite solução, se α for igual a:

a) 0
b) 1
c) –1
d) 2
e) –2

V.187 (FUVEST-2ª FASE-83) Seja M a matriz dos coeficientes do sistema linear

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

a) Calcule o determinante de M.
b) Prove que o sistema admite uma única solução.

V.188 (FUVEST-1ª FASE-83) O sistema linear

$$\begin{cases} ax+y=b \\ x+ay=b \end{cases}$$

não admite solução, se:

a) $a \neq \pm 1$
b) $a=1$ e $b=0$
c) $a=1$ e $b \neq 0$
d) $a=-1$ e $b=0$
e) $a=-1$ e $b \neq 0$

V.189 (FUVEST-1ª FASE-82) O sistema linear

$$\begin{cases} x\log 2 + y\log 3 = a \\ x\log 4 + y\log 9 = a \end{cases}$$

a) tem solução única, se $a = 0$
b) tem infinitas soluções, se $a = 2$
c) não tem solução, se $a = 3$
d) tem infinitas soluções, se $a = 4$
e) tem solução única se $a = 9$

V.190 (FUVEST-2ª FASE-81) Dadas as retas de equações:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + y = 2 \\ x + my = 3 \end{cases}$$

a) Qual a posição relativa dessas retas, quando $m = 1$?
b) Determine m para que elas passem por um mesmo ponto.

V.191 (FUVEST-2ª FASE-78) Para quais valores de a, o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = a \\ -y - 2z = a^2 \end{cases}$$ admite solução?

V.192 (FUVEST-80) O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$$ é indeterminado para:

a) todo m real
b) nenhum m real
c) $m = 1$
d) $m = -1$
e) $m = 0$

V.193 (FUVEST-79) Determine a e b, de modo que sejam equivalentes os sistemas $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$

V.194 (UNICAMP-2ª FASE-92) Sejam A e B duas matrizes de ordens n×m e m×n, respectivamente, com $m < n$. Prove que $\det(A \cdot B) = 0$, baseado em propriedades do sistema de equações lineares:

$$(A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

V.195 (UNICAMP-2ª FASE-90) Para que valores de α o sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -x - y + \alpha z = 0 \end{cases}$$ tem solução única (x,y,z) dada por

$$x = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \; y = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ e } z = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

V.196 (VUNESP-91-EXATAS) Seja o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = a \\ x - ay = -26 \end{cases}$$

Determinar os seguintes subconjuntos de R:

$L_1 = \{a \in R: S \text{ é possível e determinado}\}$

$L_2 = \{a \in R: S \text{ é possível e indeterminado}\}$

$L_3 = \{a \in R: S \text{ é impossível}\}$

V.197 (VUNESP-90-EXATAS) Determine um valor de p que torne incompatível o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 3 \\ 2x - 6y + pz = 9 \\ 5x - 4y - z = p \end{cases}$$

V.198 (VUNESP-89-EXATAS) Determine p, q, r, s, de modo que o sistema

linear $\begin{cases} 2x+6y=8 \\ x+py=r \\ 5x+qy=s \end{cases}$ seja possível e indeterminado. Calcule a solução que

satisfaz $x = y^2$.

V.199 (VUNESP-88) O valor de m que torna impossível o sistema linear

$\begin{cases} x+4y=m \\ x+m^2y=2 \end{cases}$ é:

a) 2 b) –2 c) 4 d) 1 e) 0

V.200 (VUNESP-85) Os sistemas lineares

$$\text{I}\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3=0 \\ -x_1+2x_2-3x_3=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases} \quad \text{II}\begin{cases} -2x_1+3x_2-5x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \end{cases}$$ são tais que:

a) existe uma solução de I que não é solução de II.
b) existe uma solução de II que não é solução de I.
c) não têm solução comum.
d) (a,b,c) é solução dos dois, para todos a,b,c reais.
e) são equivalentes.

V.201 (VUNESP-84) Para que valores reais de p e q o sequinte sistema não admite solução?

$$\begin{cases} 3x+py+4z=0 \\ x+y+3z=-5 \\ 2x-3y+z=q \end{cases}$$

a) $p=-2$ e $q=5$ b) $p>-2$ e $q\neq 4$ c) $p=q=1$
d) $p=-2$ e $q\neq 5$ e) $p=2$ e $q=5$

V.202 (ITA-92) Seja $A \in M_3 \times_3$ tal que $\det A = 0$. Considere as afirmações:
(I) Existe $X \in M_3 \times_1$, não nula, tal que AX é identicamente nula.
(II) Para todo $Y \in M_3 \times_1$, existe $X \in M_{3\times 1}$, tal que $AX = Y$.
(III) Sabendo que

$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}$, então a primeira linha da transposta de A é [5 1 2]

Temos que:
a) Todas são falsas
b) Apenas a (II) é falsa
c) Todas são verdadeiras
d) Apenas (I) e (II) são verdadeiras
e) n.d.a.

V.203 (ITA-92) Sejam a, b, c, d números reais não nulos que estão, nesta ordem, em progressão aritmética.
Sabendo que o sistema abaixo

$$\begin{cases} 4 \cdot 2^a \cdot x + 2^c \cdot y = \frac{2}{3} \cdot 2^b \\ 3^d \cdot x + 9 \cdot 3^b \cdot y = 81 \end{cases}$$

é possível e indeterminado, podemos afirmar que a soma desta progressão aritmética é:
a) 13
b) 16
c) 28
d) 30
e) n.d.a.

V.204 (ITA-91) Considere o sistema:

$$(P)\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2 w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

Podemos afirmar que (P) é possível e determinado quando:
a) $k \neq 0$
b) $k \neq 1$
c) $k \neq -1$
d) $k \neq 0$ e $k \neq -1$
e) n.d.a.

V.205 (ITA-91) Se (x,y,z,t) é solução do sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

, qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) $x + y + z + t$ e x têm o mesmo sinal.
b) $x + y + z + t$ e t têm o mesmo sinal.
c) $x + y + z + t$ e y têm o mesmo sinal.
d) $x + y + z + t$ e z têm o mesmo sinal.
e) n.d.a.

V.206 (ITA-90) Considere o sistema linear homogêneo nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ dado por:

$$\begin{cases} a_1x_1 + (a_1+1)x_2 + ... + (a_1+n-1)x_n = 0 \\ a_2x_1 + (a_2+1)x_2 + ... + (a_2+n-1)x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx_1 + (a_n+1)x_2 + ... + (a_n+n-1)x_n = 0 \end{cases}$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais dados. Sobre a solução deste sistema, podemos afirmar que:

a) Se $a_i > 0$, $i = 1,2,...n$, o sistema possui uma única solução.
b) Se $a_i < 0$, $i = 1,2,...n$, o sistema possui uma única solução.
c) Se $a_i > 0$, $i = 1,2,...n$, o sistema é impossível.
d) Se $a_i < 0$, $i = 1,2,...n$, o sistema é impossível.
e) O sistema possui infinitas soluções quaisquer que sejam os valores dos números $a_1,...,a_n$ dados.

V.207 (ITA-90) Dizemos que dois sistemas de equações são equivalentes, se, e somente se, toda solução de um qualquer desses sistemas for também uma solução do outro. Considere as seguites afirmações:

I- Dois sistemas de equações lineares 3×3, ambos homogêneos, são equivalentes.
II- Dois sistemas de equações lineares, 3×3, ambos indeterminados, não são equivalentes.
III- Os dois sistemas de equações lineares dados a seguir são equivalentes:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=8 \\ x+y+z=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-z=3 \\ x-y+z=4 \\ 4x-y+2z=14 \end{cases}$$

De acordo com a definição dada podemos dizer que:

a) As três afirmações são verdadeiras.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
e) As três afirmações são falsas.

V.208 (ITA-89) O sistema de equações

$$\begin{cases} x+3y-z=6 \\ 7x+3y+2z=2 \\ 5x-3y+4z=10 \end{cases}$$

a) tem somente uma solução.
b) tem infinitas soluções, com $9(x + y) = 14$ e $9(2y - z) = 40$.
c) tem infinitas soluções, com $9(x + y) = 34$ e $9(2y - z) = 20$.
d) tem infinitas soluções, com x dado em função de y e z.
e) não possui solução.

V.209 (ITA-89) Considere a equação:

$$x\begin{bmatrix} 4 \\ -16 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde x,y e z são números reais. É verdade que:
a) a equação admite somente uma solução.
b) em qualquer solução, $x^2 = z^2$
c) em qualquer solução, $16x^2 = 9z^2$
d) em qualquer solução, $25y^2 = 16z^2$
e) em qualquer solução, $9y^2 = 16z^2$

V.210 (ITA-88) Sobre o sistema

$$\begin{cases} 8x-y-2z=0 \\ 7x+y-3z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$ podemos afirmar que:

a) É possível e determinado.
b) É impossível.
c) É possível e qualquer solução (x,y,z) é tal que os números x,y e z formam, nesta ordem, uma P.A. de razão x.
d) É possível e qualquer solução (x,y,z) é tal que $y=\frac{x+z}{3}$.
e) É possível e qualquer solução (x,y,z) é tal que os números x,y e z formam, nesta ordem, uma P.A. de razão $\frac{x+y+z}{3}$.

V.211 (ITA-83) Seja a um número real tal que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. Se (x_o, y_o) é solução do sistema $\begin{cases} (2\sec a)x + (3\text{tg } a)y = 2\cos a \\ (2\text{tg } a)x + (3\sec a)y = 0 \end{cases}$ então podemos afirmar que:

a) $x_0 + y_0 = 3 - 2 \text{ sen } a$

b) $\left(-\frac{2}{3} - x_o\right)^2 - y_o^2 = -\frac{4}{9} - \cos^2 a + 2$

c) $x_0 - y_0 = 0$

d) $x_0 + y_0 = 0$

e) $\left(-\frac{2}{3} - x_o\right)^2 - y_o^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a$

V.212 (ITA-82) Considere o sistema

$\begin{cases} 2x - 1 = 3\text{sen}\,\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases}$, para x e θ reais. Se restringirmos θ ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então:

a) o sistema não possuirá solução.

b) o sistema possuirá apenas uma solução (x_1, θ_1).

c) o sistema possuirá duas soluções (x_1, θ_1) e (x_2, θ_2), de modo que $x_1 + x_2 = \frac{40}{13}$.

d) o sistema possuirá duas soluções (x_1, θ_1) e (x_2, θ_2), de modo que $\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 = \frac{17}{12}$.

e) o sistema possuirá duas soluções (x_1, θ_1) e (x_2, θ_2), de modo que $\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \frac{1}{2}$.

V.213 (ITA-79) Seja a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -22 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar que:

a) a equação tem uma e somente uma solução.

b) a equação tem duas e somente duas soluções.

c) a equação tem três e somente três soluções.

d) a equação não tem solução

e) n.d.a.

V.214 (ITA-78) Sejam r_1 e r_2, respectivamente, as características das matrizes incompleta e completa, do sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x+2y+kz=3 \\ x+y+z=2 \\ -x-y+kz=0 \end{cases} \quad \text{e } M=(k+r_1+r_2)^2$$

Quais as condições sobre M e K; de modo que o sistema acima admita solução única?

a) $M=25$ e $K=-1$
b) $M \neq 25$ e $K=-1$
c) $M \neq 25$ e $K \neq -1$
d) $M=25$ e $K \neq -1$
e) n.d.a.

V.215 (ITA-78) Examinando o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 5x+4y-2z=0 \\ x+8y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

podemos concluir que:

a) é determinado;
b) é indeterminado com 2 incógnitas arbitrárias;
c) é indeterminado com uma incógnita arbitrária;
d) é impossível;
e) n.d.a.

V.216 (ITA-77) Seja

$$\begin{cases} (k_1+k_2)x+(k_2-k_3)y+(k_1-k_3)z=0 \\ (k_2-k_1)x+(k_2+k_3)y+(k_3-k_1)z=0 \\ (k_1-k_2)x+(k_3-k_2)y+(k_3+k_1)z=0 \end{cases}$$

um sistema homogêneo em x, y e z. Com respeito ao sistema acima, podemos afirmar:

a) Se $k_1 \neq \pm k_2$, $k_1 \neq \pm k_3$ e $k_2 \neq \pm k_3$, então o sistema só admite a solução trivial.
b) Se $k_1^2+k_2^2+k_3^2 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.
c) O sistema admite solução não trivial, se, e somente se, $k_1^2+k_2^2+k_3^2=0$.
d) Se $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.
e) n.d.a.

V.217 (ITA-72) Para quais valores de α o sistema

$$\begin{cases}(\operatorname{sen}\alpha-1)x+2y-(\operatorname{sen}\alpha)z=0\\ (3\operatorname{sen}\alpha)y+4z=0\\ 3x+(7\operatorname{sen}\alpha)y+6z=0\end{cases}$$

admite soluções não triviais?

a) $\alpha=n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

b) $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{3},\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

c) $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

d) nao há valores de α

e) n.d.a.

V.218 (ITA-72) Qual é a relação que a, b e c devem satisfazer tal que o sistema abaixo tenha pelo menos uma solução?

$$\begin{cases}x+2y-3z=a\\ 2x+6y-11z=b\\ x+2y+7z=c\end{cases}$$

a) $5a=2b-c$
b) $5a=2b+c$
c) $5a\neq 2b+c$
d) não existe relação entre a,b e c
e) n.d.a.

V.219 (ITA-70) Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases}\alpha x_1-x_2+x_3=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\\ 2x_1+x_2+x_3=\beta\end{cases}$$

O sistema terá solução única, se:

a) $\beta=0$ e $\alpha=0$
b) $\beta\neq 0$ e $\alpha=0$
c) $\beta=0$ e $\alpha\neq 0$
d) $\beta=\alpha$
e) β e α forem números complexos conjugados

V.220 (ITA-69) Para que valores reais de a e b o seguinte sistema não admite solução?

$$\begin{cases}3x+ay+4z=0\\ x+y+3z=-5\\ 2x-3y+z=b\end{cases}$$

a) $a=-2$ e $b=5$
b) $a>-2$ e $b\neq 4$
c) $a=-2$ e $b\neq 5$
d) $a=b=1$
e) n.d.a.

V.221 (ITA-68) Seja

$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ y + \lambda z = 0 \end{cases}$. O sistema acima terá solução não trivial para um certo conjunto de valores de λ. Para que isto se verifique, este conjunto é constituído:

a) apenas por números complexos não reais.
b) apenas por números reais.
c) apenas por números racionais.
d) apenas por números irracionais.
e) apenas por números inteiros.

V.222 (ITA-66) Consideremos o sistema nas incógnitas

$$x,y : \begin{cases} x - y = kx \\ -x + 5y = ky \end{cases}$$

a) Qualquer que seja o valor de K, o sistema tem solução diferente da solução $x = 0$, $y = 0$.
b) Existe pelo menos um valor de K para o qual o sistema tem solução diferente da solução $x = 0$, $y = 0$.
c) Para nenhum valor de K, o sistema tem solução diferente da solução $x=0$, $y=0$
d) n.d.a.

V.223 (ITA-63) Determinar os valores m e k, de modo que seja possível e indeterminado o sistema: $\begin{cases} x + 2y - mz = -1 \\ 3x - y + z = 4 \\ -2x + 4y - 2z = k \end{cases}$

V.224 (ITA-57) Se $abcd \neq 0$, determine p e q, de modo que o sistema

$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$ seja indeterminado.

V.225 (ITA-53) Discutir o sistema:

$$\begin{cases} mx + y - z = 4 \\ x + my + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

V.226 (FEI-58) Discutir o sistema

$$\begin{cases}(2a-1)^2x+(4a^2-1)y=(2a+1)^2\\(4a-1)x+(2a+1)y=4a^2-1\end{cases}$$, segundo os valores de a.

V.227 (POLI-59) Apresente 3 valores de a, para os quais o sistema

$$\begin{cases}x+y=a\\a^2x+y=a\end{cases}$$

seja, respectivamente, indeterminado, incompatível, determinado.

V.228 (POLI-59) Estudar o sistema linear

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x-y+mz=2\\mx+2y+z=1\end{cases}$$

V.229 (POLI-60) Para que valores de a são equivalentes os sistemas:

$$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} \text{ e } \begin{cases}ax+y=a+1\\x+y=2\end{cases} ?$$

V.230 (POLI-62) Obter m, para que o sistema, nas incógnitas x,y,z, abaixo, seja compatível.

$$\begin{cases}x+my-(m+1)z=1\\mx+4y+(m-1)z=3\end{cases}$$

V.231 (MAUÁ-64) Resolver o sistema:

$$\begin{cases}3x+2y-12z=0\\x-y+z=0\\2x-3y+5z=0\end{cases}$$

V.232 (FEI-65) Discutir o sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases}mx+y=1-m\\x+my=0\end{cases}$$

V.233 (POLI-66) O sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=0 \\ \frac{1}{x}-\frac{2}{y}+\frac{4}{z}=0 \end{cases}$$

a) é impossível.
b) é indeterminado.
c) é possível e determinado.
d) só admite a solução nula.
e) n.d.a.

V.234 (CESCEM-68) O valor de m para que o sistema

$$\begin{cases} 2x+(m-7)y=29-7m \\ mx-6y=5m-3 \end{cases}$$ seja impossível é:

a) 0
b) 3
c) 4
d) 3 ou 4
e) 0 ou 3

V.235 (FEI-68) Dado o sistema linear

$$\begin{cases} ax+2y=5 \\ 3x-2y=b \end{cases}$$, tem-se:

P: Se $a=-3$, o sistema é sempre incompatível
Q: Se $a\neq-3$, o sistema é sempre determinado
R: Se $b=-5$, o sistema é sempre compatível
Assinale:

a) se P e Q são verdadeiras
b) se todas forem verdadeiras
c) se P e R verdadeiras
d) se Q e R verdadeiras
e) se todas forem falsas

V.236 (MACK-69) O sistema

$$\begin{cases} ax-by=6 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$$

a) é impossível, se $a=12$ e $b\neq-30$
b) é possível e determinado, se $a=12$ e $b=-30$
c) é impossível, se $a\neq12$ e $b\neq-30$
d) é determinado, se $a\neq12$ e $b=-30$
e) é indeterminado, se $a=12$ e $b=-30$

V.237 (CESCEM-69) Analise o sistema

$$\begin{cases} x + ay + bz + cz = 0 \\ x + az + by + cz = 0 \\ x + az + bz + cy = 0 \end{cases}$$

e assinale qual das afirmações que seguem é verdadeira:

a) indeterminado b) impossível c) a única solução é $x = y = z = 0$

d) possível e $x = \frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$, $z = -\frac{c}{2}$ e) determinado

V.238 (PUC-70) O sistema

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ ay - 4x = 1 \end{cases}$$

tem solução determinada se:

a) $a \neq 4$ b) $a \neq 2$ ou -2 c) $a \neq 0$ d) $a \neq 1$ e) n.d.a.

V.239 (CESCEA-70) O conjunto de todos os m para os quais o sistema

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

não tem solução é:

a) $\{-2,0,2\}$ b) $\{0,1,4,5\}$ c) $\{-2,1\}$ d) $\{-2,2\}$ e) $\{0,1,2\}$

V.240 (CESCEA-70) Se $x = a$, $y = b$, $z = c$, e $w = d$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + w = 1 \\ w + y = 0 \end{cases}$$

então o produto abcd vale

a) 1 b) -1 c) $-\frac{1}{16}$ d) $-\frac{1}{8}$ e) -20

V.241 (MAPOFEI-71)

a) Determinar os valores de k para que tenha solução a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 15 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ k \end{bmatrix}$$

b) Resolva a equação, na condição do item (a)

V.242 (CESCEA-71) Para que o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$$ admita solução não trivial, é suficiente que:

a) $a=b$ ou $b=c$ ou $a=c$ b) $a \neq b \neq c$ c) $abc=0$
d) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ e) n.d.a.

V.243 (MAPOFEI-72) São dadas as matrizes

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinar os vaores de a tais que
a) exista a matriz inversa A^{-1}
b) a equação $AX=B$ seja indeterminada

V.244 (CESCEA-72) A matriz incompleta do sistema

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+3z=10 \\ 2x+3y+4z=16 \end{cases}$$ tem determinante nulo. Podemos concluir que o sistema:

a) não tem solução.
b) tem um número finito de soluções, porém a solução não é única.
c) tem infinitas soluções, porém nem todo ponto do R^3 é solução.
d) tem uma única solução.
e) admite todo ponto do R^3 como solução.

V.245 (CESCEA-72) Para que o sistema

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+by=1 \end{cases}$$ seja possível e determinado é suficiente que

a) $a-c \neq 0$ b) $b \neq 0$ c) $b(a-c) \neq 0$ d) $a(a-c) \neq 0$ e) não sei.

V.246 (PUC-73) Os valores a e b, de modo que o sistema

$$\begin{cases} x+2y+2z=a \\ 3x+6y-4z=4 \\ 2x+by-6z=1 \end{cases}$$ seja indeterminado, são:

a) a=4 e b=3
b) a=3 e b=4
c) a=2 e b=1
d) a=3 e b=2
e) a=2 e b=3

V.247 (GV-73) Seja o sistema

$$\begin{cases} x+2y+mz=2 \\ x-y+z=1 \\ y+3z=n \end{cases}$$. Então:

a) para todo valor de m, o sistema é impossível.

b) $m=10$ e $n \neq \frac{1}{3}$ sistema possível e determinado.

c) $m=10$ e $n=\frac{1}{3}$ sistema possível e indeterminado.

d) $m \neq 10 \Rightarrow$ sistema impossível.

e) n.d.a.

V.248 (CESCEM-73) Podemos afirmar que o sistema

$$\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ 5x-6y+7z=-8 \\ 6x-8y+pz=q \end{cases}$$ é:

a) impossível, se $p = 10$ e $q \neq -12$
b) possível e determinado, se $q \neq -12$
c) indeterminado, se $p \neq 10$
d) tal que só existe a solução trivial ,se $p = 10$ e $q = -12$
e) possível e indeterminado, se $p = 12$ e $q = 10$

V.249 (CESCEM-73) A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$ tem determinante nulo e nenhum dos números a,b ou c é zero. Então, pode-se garantir que o sistema linear homogêneo nas incógnitas (x,y,z)

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ -ax + cz = 0 \\ -bx - cy = 0 \end{cases}$$ tal que:

a) qualquer uma das equações é combinação linear das outras duas.
b) não existe solução para o sistema.
c) qualquer terna real (x,y,z) é solução.
d) a única solução é a trivial (x = 0, y = 0, z = 0).
e) existe uma única solução não trivial.

V.250 (MAPOFEI-74) Discutir e resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases}$$

V.251 (MAPOFEI-74) Determinar os valores de a e b para que o sistema

$$\begin{cases} 6x + ay = 12 \\ 4x + 4y = b \end{cases}$$ seja indeterminado.

V.252 (PUC-74) O sistema

$$\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ bx + 4y = 5 \end{cases}$$ tem solução determinada, se, e somente se,:

a) $a = \frac{b}{2}$ b) $2a \neq -b$ c) $2a \neq b$ d) $a + 2b = 0$ e) n.d.a.

V.253 (MAPOFEI-75) Resolver, aplicando a regra de Cramer, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 3y - 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

V.254 (MAPOFEI-75) Determinar o valor de k, para que o sistema

$$\begin{cases} 3z-4y=1 \\ 4x-2z=2 \\ 2y-3x=3-k \end{cases}$$ seja indeterminado.

V.255 (CESCEM-75) O sistema de equações

$$\begin{cases} 3x+4y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

a) não tem solução.
b) admite uma única solução não trival.
c) admite apenas a solução trivial.
d) admite infinitas soluções.
e) admite apenas soluções não triviais.

V.256 (CESCEA-75) Os valores de m, para os quais o sistema

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 4x+3y+mz=0 \end{cases}$$ admite somente a solução $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, são:

a) $m > 0$ b) $m < 5$ c) $m = 4$ d) $m > -2$ e) $m \neq 4$

V.257 (MACK-75) Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+\ldots\ldots+x_n=1 \\ x_1 \quad\quad +x_3+x_4+x_5+\ldots\ldots+x_n=2 \\ x_1+x_2 \quad\quad +x_4+x_5+\ldots\ldots+x_n=3 \\ x_1+x_2+x_3 \quad\quad +x_5+\ldots\ldots+x_n=4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+\ldots+x_{n-1}=n \end{cases}$$

os valores de x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ que satisfazem o sistema:

a) são todos iguais.
b) formam, a partir de x_2, uma P.A.
c) formam, a partir de x_2, uma P.G.
d) não possuem lei de formação.
e) não podem ser determinados.

V.258 (MACK-75) O sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$$

a) tem infinitas soluções, qualquer que seja a.
b) só tem solução, se $a = 3$
c) é impossível, se $a \neq 3$
d) nunca é impossível
e) tem solução única , qualquer que seja a.

V.259 (MAPOFEI-76) Determinar os valores de t de modo que o sistema

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y + z = 0 \\ (1+t)y + z = 0 \\ x + y + (1-t)z = 0 \end{cases}$$

admita soluções (x,y,z) , distintas de $(0,0,0)$.

V.260 (MAPOFEI-76) Dado o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x - y + 4z - w = 5 \\ x + y - z + w = 2 \\ -x + 2y + z - w = 1 \\ 2x + 2y + 4z - w = 8 \end{cases}$$

informa-se que as matrizes incompleta e completa têm características iguais a um número p, sendo $p < 4$. Determinar essa característica, o números de incógnitas arbitrárias e se o sistema é impossível ou possível.

V.261 (CESCEA-76) Estudando-se o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

obtém-se que o sistema:

a) é possível, determinado e admite uma única solução $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.
b) é impossível.
c) é possível, porém determinado, com uma incógnita arbitrária.
d) é possível, porém indeterminado, com duas incógnitas arbitrárias.
e) é indeterminado, com uma incógnita arbitrária, sendo $(0,1,3)$ uma solução.

V.262 (CESCEM-76) O conjunto dos valores de $(a,b) \in R^2$ que tornam o sistema $\begin{cases} 3x-2y=a \\ -6x+4y=b \end{cases}$ indeterminado é:

a) $\{(0,0)\}$
b) $\{(1,-2)\}$
c) $\left\{(\alpha,\beta) \in R^2 / \alpha = \frac{\beta}{2}\right\}$
d) $\left\{(\alpha,\beta) \in R^2 / \beta = -2\alpha\right\}$
e) $\varnothing$

V.263 (PUC-76) Os valores de k, para que o sistema

$$\begin{cases} x-z=1 \\ kx+y+3z=0 \\ x+ky+3z=1 \end{cases}$$ tenha solução única, são:

a) $k \neq 1$ e $k \neq -3$
b) $k \neq 1$ e $k \neq -5$
c) $k \neq 1$ e $k \neq -6$
d) $k \neq 1$ e $k \neq -2$
e) $k \neq 1$ e $k \neq -4$

V.264 (GV-76) Seja S o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=k \\ x-y-z=k \\ x+y-z=k \end{cases}$$ onde k é uma constante real. Então:

a) S possui uma solução, somente para $k = 0$.
b) S possui uma solução única, qualquer que seja k real.
c) S possui infinitas soluções, para $k \neq 0$.
d) S não possui solução, qualquer que seja k real.
e) Se $x = y$, então $z = -k$, para qualquer valor de k real.

V.265 (CESCEA-77) O sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+mz=3 \end{cases}$$ é:

a) possível e determinado, para $m = 4$.
b) impossível, para todo m.
c) impossível, para $m = 3$.
d) possível e indeterminado, para todo m.
e) possível e determinado, para $m \neq 3$.

V.266 (CESCEM-78) O sistema

$$\begin{cases} x+y=a \\ a^2x+y=1 \end{cases}$$ é impossível , se, e somente se,

a) $a \neq 1$ e $a \neq -1$ b) $a = 1$ ou $a = -1$ c) $a = 1$ d) $a = -1$ e) $a \in \mathbf{R}$

V.267 (MAUÁ-79) Para que valores de m, o sistema abaixo

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+m^2y=m \end{cases}$$ admite soluções?

V.268 (MACK-79) Com relação ao sistema

$$\begin{cases} 3x+2y=1-ky \\ 3y-2x=1-kx \end{cases}$$, k real, podemos afirmar que:

a) se $k=\sqrt{13}$, o sistema é indeterminado.
b) se $k = 5$, o sistema é incompatível.
c) se $k = 5$, o sistema é determinado.
d) não existe k de modo que o sistema seja determinado.
e) não existe k de modo que o sistema seja incompatível.

V.269 (PUC-80) Estudando o sistema linear

$$\begin{cases} 4x+y-z=0 \\ -x-y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$, verificamos que ele é:

a) homogêneo indeterminado.
b) possível e determinado.
c) possível e indeterminado.
d) impossível e determinado.
e) impossível e indeterminado.

V.270 (MACK-80) O sistema

$$\begin{cases} x+y=2 \\ mx+y=1 \\ x-y=m \end{cases}$$

a) apresenta uma única solução, qualquer que seja m.
b) é incompatível, se $m = 0$.
c) é indeterminado , se $m = -1$.
d) apresenta mais de uma solução, qualquer que seja m.
e) ou apresenta uma única solução, ou é incompatível, qualquer que seja m.

V.271 (PUC-81) O sistema

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z = a \\ bx - 4y + 5z = b \\ cx - y + 4z = c \end{cases}$$

a) é sempre compatível.
b) é incompatível, para a=b=c=0.
c) é incompatível, para quaisquer a,b e c.
d) é sempre indeterminado.
e) só é compatível se $a \neq b$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$

V.272 (PUC-81) Qual dos seguintes pares ordenados (x,y) não é solução do sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$?

a) $(1, -1)$
b) $(0, -3)$
c) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
d) $(1,1)$
e) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

V.273 (MACK-81) O sistema

$\begin{cases} (\text{sen } a)x - y = 0 \\ x + (2\cos a)y = 0 \end{cases}$, nas incógnitas x e y:

a) tem solução não trivial, para dois, e somente dois, valores distintos de a.
b) tem solução não trivial, para um único valor real de a.
c) tem solução não trivial, para uma infinidade de valores de a.
d) tem somente a solução trivial, para todo valor de a.
e) é impossível, para qualquer valor real de a.

V.274 (PUC-82)O sistema linear

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 0 \\ x + by = b \end{cases}$$

a) tem solução, para todo valor de b.
b) tem solução única ,se $b = \frac{5}{6}$.
c) não tem solução para nenhum valor de b.
d) tem infitas soluções , se $b = -1$.
e) só tem solução ,se $b = 0$.

V.275 (Santa Casa-82)O sistema

$$\begin{cases} 2x+y-z=m \\ 3x+2y-2z=0 \\ x-y+mz=2 \end{cases}$$ é impossível, para:

a) $m=1$ b) $m=0$ c) $m=-3$ d) $-1<m<1$ e) $m>10$

V.276 (PUC-83) Qualquer solução (x,y.z) do sistema linear

$$\begin{cases} 4x+y+2z=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases}$$ é proporcional a:

a) (0,0,0) b) (4,4,4) c) (−4,8,1) d) (0,3,2) e) (1,2,−3)

V.277 (PUC-83) Sabendo que $a+b=1200$, $b+c=1100$ e $a+c=1500$, então $a+b+c$ vale:

a) 3800 b) 3300 c) 2700 d) 2300 e) 1900

V.278 (GV-84) O sistema linear

$$\begin{cases} x+y=m \\ m^2x+y=m \end{cases}$$ é

a) determinado, para $m=1$ ou $m=-1$
b) impossível, para $m\neq 1$
c) indeterminado, para $m=1$ ou $m=-1$
d) impossível, para $m=-2$
e) n.d.a.

V.279 (GV-84) O sistema

$$\begin{cases} 2x-y+5z=0 \\ 3x-2y-z=0 \\ 5x-3y+4z=0 \end{cases}$$ é

a) impossível
b) possível e indeterminado
c) possível e com solução $x=-11$, $y=-17$ e $z=1$
d) possível e admite apenas a solução trivial $x=y=z=0$
e) n.d.a.

V.280 (PUC-84) Um sistema de 3 equações com 3 incógnitas, nas variáveis

x,y,z: $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$ tem os coeficientes a,b,c,d,e,f,g,h e i formando,

nesta ordem, uma progressão aritmética não constante.
Esse sistema tem solução, se, e somente se,:

a) $m + n + p = 0$
b) $m = n = p$
c) $p = m + n$
d) $2n = m - p$
e) n é média aritmética de m e p.

V.281 (Santa Casa-84) O sistema

$\begin{cases} kx + 3y - kz = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ é impossível, se, e somente se:

a) $k = 1$
b) $k = 3$
c) $k \neq 0$
d) $k > 2$
e) $-\frac{1}{5} < k < \frac{9}{5}$

V.282 (GV-85) O sistema linear de equações, nas incógnitas

x e y, $\begin{cases} kx + 2y = -1 \\ 2x - y = m \end{cases}$ é impossível ,se, e somente se:

a) $k = -4$ e $m \neq \frac{1}{2}$
b) $k \neq -4$ e $m = \frac{1}{2}$
c) $k \neq -4$ e $m \neq \frac{1}{2}$
d) $k = -4$
e) $k = -4$ e $m = \frac{1}{2}$

V.283 (MACK-85) Os valores de x,y,z, solução do sistema

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 5y + 6z = 32 \\ 7x + 8y + 9z = a \end{cases}$ forma, nesta ordem, uma P.A. de razão 1.

O valor de a é:

a) 0
b) 10
c) 50
d) 55
e) 60

V.284 (GV-88) Dado o sistema linear

$$\begin{cases}(m-1)x+2y=0\\4x+(m+1)y=0\end{cases}$$ teremos:

a) Se $m = 3$ ou $m = -3$, o sistema é impossível.
b) Se $m = 3$, o sistema é possível e $(3,3)$é uma solução.
c) Se $m = -3$,o sistema é possível e $(2,2)$é uma solução.
d) Se $m \neq 3$ e $m \neq -3$, o sistema tem uma única solução.
e) n.d.a.

V.285 (MAUÁ-89) Discutir, em função do parâmetro m, o sistema

$$\begin{cases}mx+2y=5\\2x+my=3m+1\end{cases}$$

V.286 (FEI-89) Os valores reais de a e b, para que o sistema

$$\begin{cases}5x+ay=3\\bx+8y=6\end{cases}$$ seja indeterminado, são:

a) $a = 5$ e $b = 10$
b) $a = 4$ e $b = 10$
c) $a = 6$ e $b = 10$
d) $a = 7$ e $b = 11$
e) $a = 10$ e $b = 11$

V.287 (FAAP-89)

$$\begin{cases}x+2y+5z=2\\2x+3y+8z=3\\-x+y+2z=3\end{cases};\quad M=\begin{bmatrix}1&2&5\\2&3&8\\-1&1&2\end{bmatrix};\quad K=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$$

Usando M^{-1} e K,resolva o sistema acima.

V.288 (OSEC-90) Se os sistemas

$$\begin{cases}2x+y=1\\3x+2y=4\end{cases} \text{ e } \begin{cases}kx+y=-1\\x+ty=8\end{cases}$$

são equivalentes, então k e t são as raízes da equação:

a) $a^2 - 6a + 5 = 0$
b) $a^2 - 5a + 6 = 0$
c) $a^2 + 6a + 5 = 0$
d) $a^2 + 5a + 6 = 0$
e) $a^2 - 5a - 6 = 0$

V.289 (FEI-90) Se o sistema

$$\begin{cases} 3x+2y+z-1=0 \\ mx+4y+2z-2=0 \\ 2x+my-3y+2=0 \end{cases}$$ admite uma única solução, então:

a) $m \neq \pm 6$ b) $m \neq \pm 2$ c) $m \neq \pm 8$ d) $m \neq \pm 4$ e) $m \neq \pm 3$

V.290 (MACK-90) No sistema linear

$$\begin{cases} 0,8x+y-2z-w=-1,2 \\ 1,6x-y+2z+w=3,6 \\ 3x-5y+3z-8w=-7 \\ 8x+6y-3z+9w=20 \end{cases}$$ x é igual a

a) –1 b) 0 c) 1 d) 2 e) –2

V.291 (FEI-90) O sistema linear

$$\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$$ é indeterminado. O menor valor que m pode assumir é:

a) 1 b) –4 c) 0 d) –2 e) –1

V.292 (FAAP-91) Para quê valores do parâmetro real p o sistema

$$\begin{cases} px+y+z=1 \\ x+py+z=1 \\ x+y+pz=1 \end{cases}$$ é determinado, indeterminado e impossível?

V.293 (UNIFAAP-92) Qual o valor de $k \in R$ para que a solução da equação matricial

$$\begin{pmatrix} k & k+4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ seja impossível?

V.294 (FATEC-92) Para que o sistema linear

$$\begin{cases} x+my+z=0 \\ mx+y-z=4 \\ x-z=2 \end{cases}$$ seja possível e determinado, é necessário que:

a) $m=2$ ou $m=-1$ b) $m=-2$ ou $m=1$ c) $m=2$ ou $m \neq -1$
d) $m \neq 2$ ou $m=-1$ e) $m \neq 2$ ou $m \neq -1$

V.295 (ITA-93) Analisando o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$$ concluimos que este é:

a) possível e determinado, com $xyz = 7$
b) possível e determinado, com $zyx = -8$
c) possível e determinado, com $xyz = 6$
d) possível e indeterminado
e) impossível

V.296 (FATEC-93) Se o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$ admite solução não trivial, então m é igual a:

a) 2 b) –1 c) –3 d) 4 e) –5

V.297 (OSEC-93) O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

a) tem uma única solução, sendo $x + y + z = 8$
b) tem infinitas soluções
c) não tem solução
d) tem uma única solução, sendo $x + y + z = 5$
e) tem duas soluções

V.298 (MAUÁ-93) Determinar os valores dos parâmetros p e q, de modo que o sistema

$$\begin{cases} 3x + py + 4z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = q \end{cases}$$ seja indeterminado.

V.299 (MACK-93-EXATAS) Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 2^k \\ x + 2^k y = 1 \end{cases}$$, considere as afirmações abaixo:

I) O sistema sempre admite pelo menos uma solução.

II) O sistema admite solução, se k e R^*.

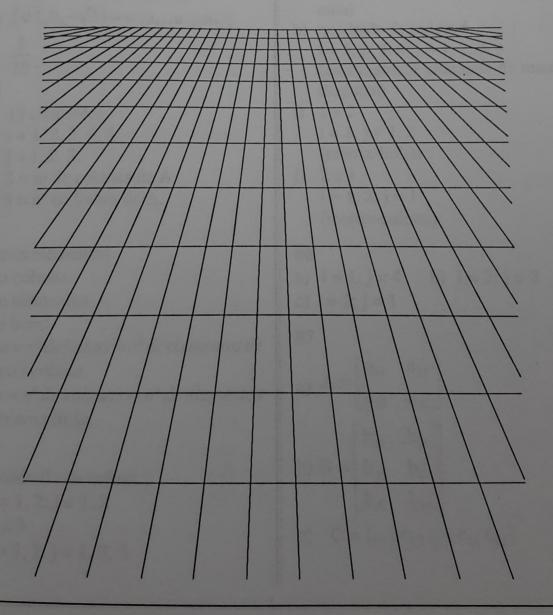
III) O sistema admite infinitas soluções, se $k \in \complement_R^{R^*}$

a) somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
d) somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
c) somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
d) nenhuma afirmação é verdadeira.
e) todas as afirmações são verdadeiras.

V.300 (MACK-93-HUMANAS) O sistema linear

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1 - k \end{cases}$$ onde k é real positivo,

a) é homogêneo,independentemente de k.
b) sempre admite solução, para qualquer que seja k.
c) é indeterminado, para um único valor de k.
d) é indeterminado, para exatamente dois valores de k.
e) ou não tem solução ou admite uma única solução, dependendo do valor de k.

Respostas

Capítulo 1

01

a) $4.5 = 20$ b) 4×5

c) $a_{32} = -1, a_{14} = -5, a_{45} = -10.$

d) $(2, 5, -4, 8, -8)$.

e) $(6, -4, -6, 7)$.

f) A não tem diagonal principal pois não é quadrada.

02

a) 3×3; 9 elementos.

b) $a_{12} = -\frac{1}{3}$; $a_{21} = \pi$; nessa matriz não existe o elemento a_{43} pois não há 4ª linha

c) $(-1, 0, 2) = (a_{11}, a_{22}, a_{33})$

d) $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}) == (a_{13}, a_{22}, a_{31})$

e) $\frac{1}{15}$

03

a) 15 elementos.

b) $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

c) $j = 1, 2, 3$.

d) 3 = nº de colunas de A.

e) 5 = nº de linhas de A.

04

a) m.n elementos.

b) n colunas.

c) n elementos.

Note bem:

m = nº de linhas = nº de elementos de uma coluna.

n = nº de colunas = nº de elementos de uma linha.

05

a) quadrada de ordem 2
$i = 1, 2; j = 1, 2$

b) 2 x 3
$i = 1, 2; j = 1, 2, 3$

c) quadrada de ordem 1
$i = 1; j = 1$

d) 1 x 5
$i = 1; j = 1, 2, 3, 4, 5$
(esta matriz é chamada de matriz - linha)

e) quadrada de ordem 3
$i = 1, 2, 3; j = 1,2,3.$
(esta matriz é chamada de matriz - unidade ou matriz-identidade)

f) 3 x 1
$i = 1, 2, 3,; j = 1$
(esta matriz é chamada de matriz-coluna)

g) 4 x 2
$i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2$
(esta matriz é chamada de matriz nula)

h) quadrada de ordem 4
$i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4$
(esta matriz é chamada de matriz-diagonal)

i) 1 x 2
$i = 1; j = 1, 2$
(matriz-linha)

j) 2 x 1
$i = 1, 2; j = 1$
(matriz-coluna)

06

a) $i = 1; j = 4$ b) $i = 2; j = 2$

c) $i = 2; j = 1$

07

a) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$

c) $C = [c_{11}\ c_{12}\ c_{13}\ c_{14}\ c_{15}]$

d) $D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ e_{41} \end{bmatrix}$

f) $F = (f_{11})$

08

a) $a_{11} = 1 + 1 = 2$; $a_{12} = 1 + 2 = 3$
$a_{13} = 1 + 3 = 4$; $a_{21} = 2 + 1 = 3$
$a_{22} = 2 + 2 = 4$; $a_{23} = 2 + 3 = 5$

Portanto $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

09

a) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(matriz-diagonal)

c) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(matriz-unidade ou matriz-identidade)

d) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

(matriz triangular)

e) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$

(matriz triangular)

10

a) M_2 b) M_{2x3} c) M_1 d) M_{1x5}
e) M_3 f) M_{3x1} g) M_{4x2} h) M_4
i) M_{1x2} j) M_{2x1}

11

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}$

12

a) $T(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$
Note que não é necessário determinar os outros elementos da matriz.

b) $T(A) = 10$ c) $T(A) = 288$

d) $T(A) = 15$

13

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$0_{2 \times 4}$ (matriz nula)

b) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ (matriz-coluna)

c) $A = [1] = I_1$ (matriz-unidade de ordem 1 ou identidade)

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

(matriz-identidade de ordem 2)

e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

(matriz triangular)

14

a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1_3$

(matriz-unidade de ordem 3)

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 2}$

(matriz nula de ordem 2)

c) $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 & -26 & 82 \end{bmatrix}$

(matriz-linha)

d) $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$

(matriz-diagonal)

e) $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ (matriz triangular)

15

a) $a = 1; b = 0; c = 5$

b) $a = 1; b = 0; c = 0; d = 1$

c) Impossível pois são de ordens diferentes: (2 x 2) e (3 x 2).

d) Impossível pois teremos $a = 1$ e $a = 4$.

e) $a = 2; b = 3; c = 1; d = -2$

16

a) $b_{31} = a_{13} = 3$ b) $b_{43} = a_{34} = -7$

c) $b_{33} = a_{33} = -5$

d) $b_{44} = a_{44}$ (não existe tal termo)

e) $b_{23} = a_{32} = -3$

17

a) $B = (b_{ji})_3 = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = (b_{ji})_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $B = (b_{ji})_{1 \times 5} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \end{bmatrix}$

d) $B = (b_{ji})_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

e) $B = (b_{ji})_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -9 \end{bmatrix}$

18

$c_{11} = 2$, $c_{23} = \dfrac{20}{3}$, $c_{22} = 5$, $c_{42} = 10$

19

a) $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 8 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{17}{4} & \frac{26}{5} \end{bmatrix}$

d) $C = A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

20

a) $c_{11} = 2a_{11} = 4$, $c_{12} = 2a_{12} = -2$, $c_{21} = 2a_{21} = 2.(-3) = -6$, etc. Portanto:

$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 8 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$ b) $C = \begin{bmatrix} -21 & -12 \\ -6 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ d) $C = \begin{bmatrix} 13 & 16 \\ 18 & -22 \\ -4 & 21 \end{bmatrix}$

21

$$\sum_{j=1}^{3} a_{2j} . b_{j3} = 2 . 1 + 1 . (-4) + 5 . 6 = 28$$

22

a) $a_{11} . b_{12} + a_{12} . b_{22} + a_{13} . b_{32} = 0$

b) $a_{21} . b_{11} + a_{22} . b_{21} + a_{23} . b_{31} = 2 . 1 + 1 . (-2) + 5 . 0 = 0$

23

a) $\sum_{j=1}^{3} a_{3j} . b_{j1}$ b) $\sum_{j=1}^{3} a_{1j} . b_{j2}$

c) $\sum_{j=1}^{3} a_{4j} . b_{j2}$

24

a) 36 b) – 28

25

a) 4 b) 6 c) 1

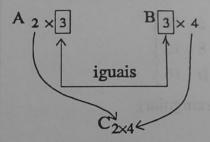
26

$C = \begin{bmatrix} -7 & 12 & 18 \\ 5 & -3 & -11 \\ 4 & -3 & -9 \end{bmatrix}$

27

$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 13 & 2 \\ -4 & -22 & 34 & 5 \end{bmatrix}$

Note bem:

28

a) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & -10 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & -16 \\ 4 & -8 & -12 \\ 0 & 20 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 12 & 0 & -24 \\ 6 & -12 & -18 \\ 0 & 30 & -6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e) $0_{3 \times 3}$

f) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -12 \\ 3 & -5 & -9 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$ g) $0_{3 \times 3}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 2 & -7 & -6 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}$

29

a) $A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B = 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

c) $C = 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

d) $D = 18 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

30

a) $X = A - B$ b) $X = A - B$
c) $X = B + A$ d) $X = B - A$
e) $X = 3A - 7B$

31

$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

32

$X = 2$

33

$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge Y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

34

$(x, y, z) = (2, 1, 3) \Rightarrow E = x + y - z = 0$

35

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

36

a) $C_{58} = 9$
b) não se define o elemento $c_{(13)9} = 2.a_{(13)9} - b_{9(13)}$ pois a matriz $B_{14 \times 10}$ não tem o elemento $b_{9(13)}$.
c) $9 + 15 - (-18) = 42$

37

a) 2×2 e 3×3 b) 3×3 e 3×3
c) Não existe AB, e BA é do tipo 2×3
d) 3×2, e não existe BA
e) 4×4 e 1×1 f) 5×2, e não existe BA

38

a) Não existe A^2 b) 3×3
c) 2×2 d) Não existe A^2

39

Ela deve ser quadrada

40

a) C é do tipo 2×3 b) B é do tipo 2×5
c) A é do tipo 2×2

41

a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 10 & 15 & 17 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 13 & 7 \end{bmatrix}$

42

a) $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 0 & 4 \\ 15 & -10 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -12 & 13 & 14 \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ -11 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 9 & -18 & 16 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -18 \\ -27 \end{bmatrix}$

43

a) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 33 & -6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -12 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -10 \\ 7 \end{bmatrix}$

44

a) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

45

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 20 & 0 & -30 \\ -20 & 20 & 20 \\ 0 & -40 & 20 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 10 & 4 & -18 \\ -5 & 5 & 3 \\ 3 & -15 & 9 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 9 & 1 & -15 \\ -6 & 6 & 5 \\ 2 & -16 & 9 \end{bmatrix}$

46

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

47

a) $a = 2$ $b = -1$ $c = 3$

b) $x = -1$ $y = 2$

48

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

49

A e B comutam.

50

$x = 3$ e $y = -1$

51

a) $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{bmatrix}$, com $a, b \in R$

b) $X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ com $a, b \in R$

52

a) Aplicando a propriedade distributiva à direita e, em seguida, à esquerda, teremos:

$(A+B)(A-B) = A(A-B)+B(A-B) =$
$= A^2-AB + BA-B^2 =$
$= A^2-AB + AB - B^2 = A^2 - B^2.$

b) Fazer como no item a.

53

A é involutiva.

54

a) I_n, se A é de ordem n.

b) A c) A

55

A é idempotente.

56

a) A b) A c) A

57

a) A b) A c) A

58

$a = 0$ e $b = -1$

59

$x = \frac{-2}{3}$, $y = -1$

60

a) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ b) $B^t = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C^t = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ -1 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Esta matriz é simétrica.

d) $D^t = 0_{2\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e) $E^t = -E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Esta matriz é anti-simétrica.

f) $F^t = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz-identidade é simétrica.

61

a) $(a,b,c) = (\sqrt{2}, -7, \frac{1}{2})$

b) $(a,b,c) = (0,3,c)$ ou $(a,b,c) = (1,1,c)$, $\forall c \in R$

c) $d \in R$

d) $(a,b,c) = (2,-3,5)$

62

a) $(a,b,c) = (0,-4,1)$

b) impossível, pois $a_{11} \neq 0$

c) $(a,b,c,d) = (8, 2\sqrt{2}, 0, 5)$

63

a) $(A \cdot B)^t = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 15 \\ 5 & 16 & -9 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t$

c) Não se define.

64

a) $X = A^t$; ordem $n \times m$

b) $X = \frac{1}{\alpha} \cdot A^t$; ordem $n \times m$

c) $X = B^t - A$; ordem $m \times n$

d) $X = B^t \cdot A^t$; ordem $p \times m$

e) $X = A - B^t$; ordem $m \times n$

f) $X = \alpha \cdot A^t$; ordem $n \times m$

g) $X = \frac{1}{\alpha} \cdot B^t \cdot A^t$; ordem $p \times m$

h) $X = B - A^t$; ordem $n \times m$

i) $X = \frac{1}{2}(A - B^t)$; ordem $m \times n$

j) $X = 2C - B^t \cdot A^t$; ordem $p \times m$

65

a) $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

66

a) $A = I_2$ b) $A = I_2$

67

$A = O_3$

68

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

69

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

70

a) $AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I^2$

b) $BA=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I^2$

c) $A^{-1}=B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

71

$$B=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

72

$$B=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 4 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

73

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) B não admite inversa

c) $C^{-1}=\begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 15 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

74

a) $A^{-1}=\frac{1}{11}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C^{-1}=\begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & -\cos x \end{bmatrix}$

d) $D^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

e) E não admite inversa (matriz singular)

75

a) $X=A^{-1}\cdot B^t$ b) $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

c) $X=A^{-1}\cdot(C-B)$ d) $X=(A-B)^{-1}\cdot C^{-1}$

e) $X=A^{-1}\cdot B^{-1}$ f) $X=I_n-A$

g) $X=\frac{1}{k}\cdot C^tB^t$ h) $X=B\cdot(A-I_n)^{-1}$

i) $X=\frac{1}{\alpha}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$

j) $X=(2I_n-A)^{-1}\cdot(B+C)$

k) $X=\frac{1}{\alpha}\left(A^t\right)^{-1}\cdot\left(B^t\right)^{-1}$

l) $X=\alpha\cdot A^{-1}$

76

$$X=\frac{1}{2}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 6 \\ \frac{7}{2} & \frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

77

a) $X=(AB)^{-1}\Rightarrow X^{-1}=AB\Rightarrow$ $A^{-1}X^{-1}=B\Rightarrow A^{-1}=BX\Rightarrow B^{-1}A^{-1}=X$. De (1) e (2)$\Rightarrow(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (cqd).

b) demonstrar.

78

a) $X=\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $X=\begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

79

a) x=1 e y=-2 b) x=0 e $y=\frac{1}{2}$

c) x=4 e y=-5

80

$a_{21}=-3$

81

A^{-1} é a inversa de A:

$AB=AC \Rightarrow A^{-1}\cdot(AB)=A^{1}\cdot(AC) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot B=(A^{-1}\cdot A)\cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow I_n\cdot B=I_n\cdot C \Rightarrow B=C$ c·q·d·

82

a) sim b) não c) sim

d) sim e) sim

83

a) 3 b) 4 c) 3×4

d) $a_{11}=2$, $a_{33}=-5$, $a_{24}=-2$ e não existe a_{42}.

e) a_{12}, a_{23}, a_{32}, a_{14}, a_{31} e a_{34}.

84

a) (2,1,0,–3) b) (2,–1,3)

c) (1,5,8) d) (3,8,–5,–7)

e) (2,5,–5) f) (0,5,3)

g) (–3,7,8) h) (–7)

85

a) 0 b) 4 c) 9 d) 2

e) 1 f) 16

86

a) 1×6, 6×1, 2×3, 3×2

b) 1×5, 5×1

c) 1×15, 15×1, 3×5, 5×3

d) 1×9, 9×1, 3×3

87

a) 4 b) 6 c) não existe d) 5

88

a) 3 b) 4 c) 11

89

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \\ -1 & -8 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

90

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

91

a) (7,–4,2,1) b) (–1,–4,–7,8)

c) (4,3,2,–6) d) (7,3,0)

e) (–5,–7,1) f) (8,–3,1,–6)

92

a) –1 b) –4 c) 3

d) 52 e) 12 f) –78

g) 7 h) –2

93

a) $\sum_{j=1}^{4} a_{3j}$ b) $\sum_{i=1}^{4} a_{i4}$

c) $\sum_{i=1}^{4} (ia_{i3})$ d) $\sum_{j=1}^{4} (j+1)a_{4j}$

e) $\sum_{p=1}^{4} (a_{3p} \cdot a_{p4})$ f) $\sum_{p=1}^{4} (a_{1p} \cdot a_{p1})$

94

$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

95

a) $C_{3,2} \cdot C_{4,2} = 3 \cdot 6 = 18$
b) $C_{3,3} \cdot C_{4,3} = 1 \cdot 4 = 4$
c) 6 d) 12 e) 3

96

34

97

$C_{m,p} \cdot C_{n,p}$

98

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

99

a) $x=5$, $y=7$ e $z=0$
b) $x=4$, $y=0$, $z=\pm 3$

100

a) $x=2$, $y=-3$ b) $A=B=\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ d) $E=\begin{bmatrix} 20 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

101

a) 2 b) −8 c) $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

d) $E=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 4 & 5 & -8 \\ -8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

102

a) $\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 6 & 2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -23 & -5 & 12 \\ 15 & -24 & -23 \end{bmatrix}$

103

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -11 & -6 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}$

104

a) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

105

a) $X=\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 5 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $X=\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 4 \\ -\frac{7}{2} & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix} 4 & 26 \\ -29 & 4 \\ 12 & -11 \end{bmatrix}$

106

$X=\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 21 & 6 \\ 40 & 25 \end{bmatrix}$

107

a) X é 3×3 e Y é 4×4

b) B é 3×2 e não existe y

c) A é 4×6 e X é 4×4

d) B é 1×4 e X é 4×4

108

a) $\begin{bmatrix} -13 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 7 \\ -7 & 29 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -17 \end{bmatrix}$

109

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -13 & -14 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

110

a) $\begin{bmatrix} -2x+3y \\ 5x+4y \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

111

a) $\begin{bmatrix} 10 & -32 \\ 12 & -33 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 10 \end{bmatrix}$

112

$\begin{bmatrix} 630 & -140 \\ -280 & 770 \\ -350 & 0 \end{bmatrix}$

113

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) Não existe BA

c) Não existe A^2 d) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -12 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

114

a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

115

$a=2$, $b=0$, $c=1$ ou $a=-2$, $b=0$, $c=-1$

116

a) $X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

b) $X=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{bmatrix}$, com $a,b \in R$.

117

A e B comutam, pois

$A.B = B \cdot A = \begin{bmatrix} -32 & 30 \\ 10 & -12 \end{bmatrix}$

118

a) $x=-\frac{3}{2}, y=1$ b) não existem

119

$\begin{bmatrix} a & b \\ -3b & a+6b \end{bmatrix}$, com $a, b \in R$

120

Demonstração

121

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

122

Sim pois $A^2 = I_2$

123

Sim pois $A^2 = A$ em todos os casos

124

Sim pois $A^2 = \overline{O}_2$ em todos os casos

125

a) $a = 3, b = 4$ b) $a = 4, b = 6$

c) $a = 3, b = \frac{9}{2}$

126

a) $\overline{O}_2$ b) I_2 c) B d) C e) C

127

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & -16 \\ 5 & -16 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 21 & 1 \\ -15 & 11 \\ -33 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -30 & 0 & 90 \\ 101 & 53 & 227 \end{bmatrix}$

128

$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & 1 \\ -8 & 1 & -8 \end{bmatrix}$

129

$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

130

$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ou $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

131

$B=\begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

132

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

133

a) Sim. $B \cdot A = A \cdot B = I_2$
b) Não. $B \cdot A \neq I_2$
c) Sim. $B \cdot A = A \cdot B = I_3$

134

$$B=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

135

$$B=\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

136

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ b) não existe A^{-1}

c) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

137

$c_{22} = 3, d_{32} = -\dfrac{1}{4}$

138

$$\begin{bmatrix} 13 & -5 & 2 \\ 52 & -49 & -4 \\ 71 & -66 & -5 \end{bmatrix}$$

139

a) $\begin{bmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{bmatrix}$

140

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

141

a) $AB=[-1]$, $BA=\begin{bmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

142

a) $\begin{bmatrix} -52 \\ 78 \\ 69 \end{bmatrix}$ b) $[-15 \quad 97 \quad 78 \quad -112]$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $[-1 \quad 0 \quad -1 \quad 4]$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

143

$ABC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

144

$ABCD = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{bmatrix}$

145

a) $\begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

146

a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\text{sen}\, n\alpha \\ \text{sen}\, n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para n par e $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ para n impar

147

a) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

148

$\begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$

149

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

150

Demonstração

151

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

152

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \dots & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

153

a) $B=\begin{bmatrix} a & 2b \\ -b & a-2b \end{bmatrix}$, com a, b $\in \mathbb{R}$

b) $B=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, com a, b $\in \mathbb{R}$

c) $B=\begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{bmatrix}$, com a, b $\in \mathbb{R}$

d) $B=\begin{bmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{bmatrix}$, com a, b $\in \mathbb{R}$

e) $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, com a, b, c $\in \mathbb{R}$

f) $B=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, com a,b,c, d $\in \mathbb{R}$

154

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

155

$$\begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -922 \end{bmatrix}$$

156

$$\begin{bmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{bmatrix}$$

157

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$,

com a,c $\in \mathbb{R}$ e b $\in \mathbb{R}^*$

158

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}$ ou

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$

159

Demonstração

Capítulo 2

160

a) -15 b) $-\sqrt{2}$ c) $\frac{3}{5}$ d) 1

e) $-\frac{1}{3}$ f) $1 = sen^2x+cos^2x$

g) 0 h) 0 i) 1

j) sen(a+b) = sena cosb+senb cosa

k) 0 l) $cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$

161

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

162

a) -3 b) -6 c) 0 d) 0

163

a) 24 b) 12 c) -15 d) 54

e) -20 f) -4

164

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$

c) zero (observe que é o determinante de uma matriz com duas filas proporcionais: 1ª e 3ª linhas)

d) zero (observe que é o determinante de uma matriz com duas filas iguais: 1ª e 2ª colunas)

e) zero (2ª e 4ª colunas proporcionais)

f) zero (tem uma fila nula: 3ª linha)

g) 6 (determinante de uma matriz triangular)

h) ac (matriz triangular)

i) abc = produto dos elementos da diagonal principal (matriz triangular)

j) abc (matriz triangular)

k) 24 (matriz triangular)

l) abcd (matriz triangular)

165

a) $detA = 2$ b) $det(A^t) = 2 = detA$

c) $detB = 6 = 3 \cdot detA$

d) $detC = 8 = 4detA$

e) $det(3A) = 54 = 3^3 \cdot detA$

f) $detD = -2 = -detA$

166

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -7 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $det(AB) = 18$ c) $detA = 2$

d) $detB = 9$ observe que $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$

167

a) $detA = 10$

b) $det(5A) = 5^2 \cdot detA = 250$

c) $det(-3A) = (-3)^2 \cdot detA = 90$

d) $det(A^t) = 10 = detA$

168

a) $detA = -2$ b) $detB = 2 \cdot detA = -4$

c) $detC = 2 \cdot 2 \cdot detA = -8$

d) $det(2A) = 2^3 \cdot detA = -16$

169

a) $detA = -5$ b) $detB = (-3) detA = 15$

c) $det(-3A) = (-3)^4 \cdot detA = -405$

170

757 (Este determinante deve ser desenvolvido pela 3ª linha)

171

a) detB = a (P.2) ($B = A^t$)

b) det C = 3.a (P.6) (3.L_1 de A)

c) det D = −a (P.3) (troca das colunas C_1 e C_2)

d) det E = −10a (P.6) (5.C_2 e (−2) .C_3)

e) det F = −(−a) = a (P.3) (2 trocas de linhas: 1ª e 2ª linhas e, em seguida, 2ª e 3ª linhas)

f) $det(2A) = 2^3.a = 8a$ (P.6) (2.L_1, 2.L_2 e 2.L_3)

172

b) $8.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

c) $12.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

d) $14.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

173

a) $\frac{\alpha}{2}$ b) $\frac{\alpha}{3}$ c) $\frac{\alpha}{6}$

174

det B = $(-1)^{n-1}.\alpha$(L_1 trocou (n–1) vezes de posição com a respectiva linha de baixo : L_2 até Ln)

175

$\det C = \alpha.(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (note que o número de trocas de posições entre as linhas é m = (n–1) + (n–2) + (n–3) +...+ 3 + 2 + 1)

176

a) a 2ª coluna é nula (P.1)
b) a 4ª linha é nula (P.1)
c) 1ª e 3ª colunas iguais (P.4)
d) filas proporcionais: $L_2 = 2.(L_1)$ (P.5)
e) $C_4 = (-3).C_2$ (P.5)
f) $L_2 = L_4$ (P.4)
g) $C_3 = \frac{2}{3}C_1$ (P.5)

177

a) 6 b) –4 c) –10
d) 21
e) abc (matriz diagonal)
f) det $(I_4) = 1$ g) $a_{11}.a_{22}.a_{33}. \dots .a_{nn}$

178

a) –6 b) 8 c) –abc d) –abc
e) abcd f) abcde

179

$\det A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} \cdot a_{n1}$

180

a) –15 (P.8) b) $2^4.(-5) = -80$ (P.6)
c) 9 (P8) d) –5 (P.2)
e) $A.A^{-1} = I_4 \Rightarrow$

$\det(A.A^{-1}) = \det(I_4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A.\det A(A^{-1}) = 1 \Rightarrow$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{3}$

f) 625 (P.8)

181

det A = ±1.
Obs: A é ortogonal $\Leftrightarrow A^t = A^{-1}$

182

det = 0 ou det A = ±1

183

det A = 0.
Obs: A é anti–simétrica $\Leftrightarrow A = -A^t$

184

0 (filas proporcionais: $C_3 = -2.C_1$)

185

5

186

0 ($L_1 = 5.L_2$)

187

0 ($C_3 = 2.C_1$)

0 (2ª coluna nula)

189

−60 (achar a transposta de B, trocar 2ª e 3ª colunas de C, somar os determinantes, colocar em evidência 5 na 1ªcoluna e (−3) na 2ª linha do resultado)

190

det B = 2a

191

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \\ 4 & -5 & -5 \end{vmatrix}$ b) 5

192

a) 18 b)−84

193

(b−a) (c−a) (c−b)

194

(b−a) (c−a) (d−a) (c−b) (d−b) (d−c)

195

0 (1ª e 3ª colunas iguais)

196

abcd (matriz triangular)

197

a) (a,b,c); V (a,b,c) = (b−a) (c−b) (c−a)
b) (2,5,3); V(2,5,3) = 3.(−2).1 = −6
c) (1,0,−3); V(1,0,−3) = (−1).(−3).(−4) = −12
d) (a,b,c,d); V(a,b,c,d) = (b−a)(c−d)(c−a) (d−c)(d−b)(d−a)
e) (1,2,3,5); V((1,2,3,5) = 1.1.2.2.3.4 = 48
f) (1,−1,0,−2); V(1,−1,0,−2) = (−2).1.(−1).(−2).(−1).(−3) = −12

198

a) 2.3.V(2,3,4) = 12
b) $a^2 b^2 c^2$. V (a,b,c) = $a^2 b^2 c^2$ (a−b)(c−b)(c−a)

199

a) 3 b) −18 c) 52

200

a) −6 (trocar as posições das colunas C^1 e C^3)
b) −4 (um possibilidade é colocar (2) em evidência na 1ª coluna e, depois, trocar L_1 e L_2)
c) 38 (usar teorema de Jacobi:
$C_3.(-2) \xrightarrow{+} C_1$

201

2

202

Demostração

203

a) x = 0 ou x = 3 b) x = ±1
c) A é inversível, $\forall x \in \mathbf{R}$
d) x = 0 e) x = ±7

204

a) $x \in \mathbf{R} \mid x \neq 3$ e $x \neq 4$
b) $x \in R \mid x \neq -\frac{3}{2}$ e $x \neq 3$ (Sugetão: efetue $C_2.(1) + C_3.(1) \xrightarrow{+} C_1$ e coloque o fator comum da 1ª coluna em evidência; em seguida, aplique a regra de Chió.)
c) $x \in \mathbf{R} \mid x \neq 1$ (use a regra de Chió)
d) $x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0$ e $x \neq 1$ e $x \neq 2$ (matriz de Vandermonde)
e) $x \in \mathbf{R} \mid x \neq a$ e $\neq b$ (use a regra de Chió)

205

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

b) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -\cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

d) A não admite inversa pois det A = 0 (A é matriz singular)

e) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

f) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

206

a) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$

d) $\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & .. & 0 \\ . & . & . & . & .. & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$

207

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & ... & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

208

a) {1} b) {25} c) {±3}
d) {7} e) {1,–11} f) {±2;4}

209

detB = 70 det A

210

$\beta = 42\alpha$

211

Por em evidência o fator 5 da 4ªcoluna

212

Aplique o teorema de Jacobi

213

Faça 3ªlinha vezes 10 e soma com a 4ª

214

Note que 3247,3213,3349,2669 e 3417 são múltiplos de 17

215

a) 0 b) 0 c) 0 d) 0

216
a) 0 b) 0 c) 0

217 Aplique o teorema de Jacobi

218
a) −84 b) 98

219
a) 100 b) 195

220
a) $(-1)^{n-1}$ b) n!

223
−5

224
$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

225
a) 5 b) $-\frac{1}{2}$ c) 3 d) −2
e) 4 f) 0 g) 0 h) sen 2a
i) $2a^2+2b^2$ j) $2b^3$

226
a) −3 b) 1 c) 1 d) 7
e) $\log_b \frac{a}{c}$ f) $\log_d \frac{a}{d}$

227
a) 5 b) −7` c) 4 d) 5

228
a) −38 b) 16 c) −7 d) 5
e) 10 f) −5

229
a) 8 b) −5 c) 2 d) −3

230
a) 36 b) 4 c) 13 d) 3
e) −2 f) −5 g) 1

231
a) 0 b) 0

232
a) −11 b) 115 c) 2 d) −62
e) −83 f) 120 g) −11 h) 1
i) 15

233
a) $\left\{2, \frac{4}{3}\right\}$ b) $\left\{1, \frac{-9 \pm \sqrt{57}}{2}\right\}$
c) $\{-1, -4\}$ d) $\{2\}$

234
E = −2xD

235
a) 0 b) 0 c) 0 d) 0
e) 0 f) 0 g) 0 h) 0

236
a) −84 b) 43

237 Demonstração

238
a) −8 b) 90

239
a) 16 b) 1680
c) $190512 = 3^3.4.6^2.7^2$
d) $(b-a)^2(c-d)^2(c-a)^2$

240
a) n! b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.n!$

241
a) 1 b) 160 c) 394
d) $b_1.b_2.b_3...b_n$

242
a) 48 b) 900 c) 665
d) $a^2+b^2+c^2-2(ab+ac+bc)$
e) $-2(x^3+y^3)$ f) $(af-be+cd)^2$

243
a) $\{-1\}$ b) $\{\pm 1, \pm 2\}$

244

a) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

245

a) $\frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ . & . & . & . & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

246

a) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

247

Note que 2139, 1863,... são divisíveis por 23(aplique Jacobi)

248

–1

249

a) $x = 4$ b) $y = 15$

250

(6,0) e (0,–4)

251

a) 28 b) 18

252

$x = -39$ ou $x = -15$

253

(0,4) ou (0,–10)

254

a) (b–c)(d–a) b) 4ab
c) sen (x–y) d) cos (x+y)
e) tg^2x f) $cossec^2x$
g) o h) 0 i) 1 j) –1

255

a) $3abc-a^3-b^3-c^3$ b) 0
c) $2x^3-(a+b+c)x^2+abc$
d) (ac+bc+ac)x+abc e) –1

256

a) –1487600 b) –29400000
c) –12 d) 16 e) 1 f) –36

257

a) 8 b) –1

258

a) 216 b) −106 c) 4

d) −12 e) 5 f) 1

259

a) $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

b) $x_1 (x_2-a_{12}) (x_2-a_{23})...(x_n-a_{n-1,n})$

c) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.b_1b_2...b_n$

d) $2n-1$

e) $(a_0+a_1+a_2+...+a_n)x^n$

f) $x_1.x_2...x_n\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+...+\frac{a_n}{x_n}\right)$

260

a) 1 b) $n(-1)^{n-1}$

c) $(-1)^{n-1}.(n-1)2^{n-2}$

261

a) abcd b) abcd c) xyzuv

262

a) 0 (3ªlinha é combinação linaer das outras)

b) 0 (4ªlinha é combinação linaer da 2ª e 3ª)

263

Multiplicar a 2ª coluna do primeiro determinante por yz, a 3ª coluna por zx e a 4ªcoluna por xy.

264 Demonstração

265

a) $\{\pm1,\pm2\}$ b) $\{0,-1\}$

c) $\{a_1,a_2,a_3...,a_n\}$ d) $\{0,1,2,...,n\text{-}1\}$

266

a) 1 b) − 2 c) − 400

d) 0

267

a) 0.(tirar a 1ª coluna das demais)

b) $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)$.(Tirar a 1ªlinha) de todas as demais

c) $(n-1)!$(Tirar a 1ª linha das demais)

d) $-2(n-2)!$ (Tirar a 2ª linha das demais)

e) 1.(Somar a 1ªlinha à 2ª)

f) $\frac{n.a^{n-1}}{2}\left[2a+(n-1)h\right]$.(Somar todas as colunas à1ª)

268

$D_1 = a_1+b_1$, $D_2 = (a_1-a_2)(b_2-b_1)$ e $D_n = 0$ para $n\geq3$

269 Demonstração

270

$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$.(Olhar exercício 224)

271

$D_1 = 1+x_1y_1$,$D_2 = (x_2-x_1)(y_2-y_1)$e $D_n = 0$ para $n>2$. Calcule o determinante do produto

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & .. & . \\ 1 & x_n & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & .. & .. \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

272

a) $\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & .. & .. & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

273

a) $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ou

$x = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ou

$x = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Capítulo 3

274

a) Sim b) Não c) Não
d) Sim e) Não f) Não
g) Não h) Não i) Sim

275

a)Sim b)Sim c)Sim
d)Sim e)Não f)Não
g)Não h)Sim i)Sim

276

a) Sim b) Sim c) Sim
d) Impossível pois qualquer seqüência (x, y, z, w) é solução dessa equação.

277

a) Não b) Nào
c) Nào existe pois essa equação é impossível ($S = \varnothing$)

278

a) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ b) $S = R$

c) $S = \varnothing$ d) $S = \{0\}$

279

a) $\begin{cases} a \neq 0 \Rightarrow S = \left\{\frac{b}{a}\right\} \\ a = 0 \text{ e } b = 0 \Rightarrow S = R \\ a = 0 \text{ e } b \neq 0 \Rightarrow S = \varnothing \end{cases}$

b) $\begin{cases} a \neq 2 \Rightarrow S = \left\{\frac{a}{a-2}\right\} \\ a = 2 \Rightarrow S = \varnothing \end{cases}$

c) $\begin{cases} a \neq 3 \Rightarrow S = \{-1\} \\ a = 3 \Rightarrow S = R \end{cases}$

d) $\begin{cases} a \neq 1 \text{ e } a \neq -1 \Rightarrow S = \left\{\dfrac{a+1}{a-1}\right\} \\ a = 1 \Rightarrow S = \varnothing \\ a = -1 \Rightarrow S = R \end{cases}$

e) $S = \left\{\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right\}$ para qualquer $a \in R$.

280

a) (5, 2) b) (– 7, – 6) c) (2, 0)

d) $\left(0, -\dfrac{4}{3}\right)$ e) $\left(\dfrac{4+3a}{2}, a\right)$

f) $S = \left\{(x,y) \in R^2 \middle| (x,y) = \left(\dfrac{4+3a}{2}, a\right), \forall a \in R\right\}$

281

a) (– 3, 0, – 1) b) (4, – 11, 4)

c) (– 2, 2, – 1) d) $\left(\dfrac{1}{2}, 3, -\dfrac{1}{5}\right)$

e) (a, 2a – 5b + 1, b)

f) $S = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3 \mid (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (a, 2a - 5b + 1, b), \forall a, b \in R\}$

Obs.: R^3 é o produto cartesiano RxRxR (ver volume 1 desta coleção)

282

a) (1, 2, 3, 7) b) (0, 3, – 2, – 1)

c) a, b, c, – a + b + 2c)

d) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 (x, y, z, w) = (a, b, c, -a + b + 2c), \forall a, b, c, \in R\}$

Obs.: $R^4 = RxRxRxR$.

283

a) É

b) Não é, pois não satistaz à 3ª equação

c) É

d) Não é, pois não satistaz à 4ª equação

284

a) (1, – 3) b) (1, 1) c) (1, – 4)

d) ∄ par $(1, \alpha_2)$ que satisfaça ao sistema SL_4.

285

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

286

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $[A, B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ e

$[A, B] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -5 \end{array}\right]$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e

$[A, B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right]$

287

a) $SL_1 \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ (2x3)

b) $SL_2 \{ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$ (1x4)

c) $SL_3 \begin{cases} 2x = 6 \\ 4x = 12 \\ 5x = 10 \end{cases}$ (3x1)

Lembre – se: mxn = **m** equações e **n** incógnitas.

288

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

portanto $S = \{(x, y) = (1, 3)\}$

289

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}.B =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

portanto $S = \{(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, -3)\}$

290

a) $S = \{(x, y) = (3 - 5)\}$
b) $S = \{(x, y) = (0, 0)\}$
c) $S = \{(x, y, z) = (, 2 - 1, 0)\}$
d) $S = \{(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$
e) $S = \{(x, y, z, w) = (4, 1, 3, -2)\}$

291

$a = 2, \quad b = -5, \quad c = -7$

292

a) $\{(4, 3, 0)\}$ b $\{(2, 3, -1)\}$
c) $\{(3, -2, 6)\}$

293

$a \neq -1$ e $a \neq 1$ e $\left\{\left(\frac{-a}{a+1}, \frac{2}{a+1}, \frac{a}{a+1}\right)\right\}$

294

$a \neq -11$ e $a \neq 8$ e $\{(0, 0, 0)\}$

295

a) SPD $(m = n = 2)$; $S = \{(5, 8)\}$
b) SPD $(m = n = 3)$; $S = \{(0, -2, 2)\}$
c) SPD $(m=n=4)$; $S=\{(-1, 3, 12, -7)\}$
d) SPI $(m < n)$; g.i $= 3 - 2 = 1$
$S=\{(-3-129a, -2+29a, -1-5a, a), \forall a \in R\}$
e) SPI $(m < n)$; g.i $= 5 - 3 = 2$
$S = \{(2 - 2a - 2b, a, +5 + b, b, 2), \forall (a,b) \in R^2\}$
f) SI; $S = \varnothing$

296

a) $S = \{(2, 3, 4)\}$ (SPD)
b) $S = \{(11 - 3a, a, -3), \forall a \in R\}$ (SPI)
c) $S = \varnothing$ (SI)
d) $S = \{(-3, 1)\}$ (SPD)
e) $S = \{(0, 7, 6, -3)\}$ (SPD)
f) $S = \{(1 - a + 3b - 2c, a, -9 + 3b, b, c), \forall (a, b, c) \in R^3\}$ (SPI)

297

$a = -1$ e $b = 3$

298

$a = -1, b = 2$ e $c = -3$

299

a) $a = 4 \Rightarrow$ SI $(0.z = 5)$
$a \neq 4 \Rightarrow$ SPD $(m = n = 3)$
b) $a = -2 \Rightarrow$ SPI $(m<n)$
$a \neq -2 \Rightarrow$ SPD $(m = n)$
c) SPD, $\forall a \in R.(m = n)$
d) $a = \pm 3 \Rightarrow$ SPI $(m=n)$
$a \neq 3$ e $a \neq -3 \Rightarrow$ SI
e) $a = 2 \Rightarrow$ SI
$a \neq 2 \Rightarrow$ SPD $(m=n)$

f) $a=2 \Rightarrow SPI$
$a=-2 \Rightarrow SI$
$a \neq 2$ e $a \neq -2 \Rightarrow SPD$

g) $a=-1 \Rightarrow SPI$
$a \neq -1 \Rightarrow SPD$

h) $a=1 \Rightarrow SPI$
$a=-1 \Rightarrow SI$
$a \neq 1$ e $a \neq -1 \Rightarrow SPD$

300

a) SPI $S=\{(3a, 2a, a).\ \forall a \in R\}$
b) SPD $S=\{(0, 0, 0)\}$
c) SPD $S=\{(0, 0)\}$
d) SPI $S=\{(-4a, a), \forall a \in R\}$
e) SPI $S=\{(2a, a, 7a, a), \forall a \in R\}$

301

a) $a \neq 2 \Rightarrow S=\{(2a+2, a-1, 2a)\}$
$a=2 \Rightarrow S=\{(6, b-3, b), b \in R\}$

b) $a \neq 1 \Rightarrow S=\{(2a^2-2a, a-1, a-1)\}$
$a=1 \Rightarrow S=\{(-b, 2b, b), b \in R\}$

c) $a \neq -3$ e $a \neq 3 \Rightarrow$

$$S=\left\{\left(\frac{12a}{a^2-9}, \frac{a+3}{a-3}, \frac{a-3}{a+3}\right)\right\}$$

$a=-3$ ou $a=3 \Rightarrow S=\varnothing$

d) $a \neq 0$ e $a \neq 2 \Rightarrow S=\left\{\left(\frac{a^2+4}{4a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)\right\}$

$a=2 \Rightarrow$

$$S=\left\{\left(\frac{2b+7}{8}, \frac{3-2b}{4}, b\right), b \in R\right\}$$

$a=0 \Rightarrow S=\varnothing$

302

a) $\begin{cases} x-2y-z=1 \\ y-5z=2 \\ 3z=6 \end{cases}$ SPD

b) $\begin{cases} x-3y-2z+4w=1 \\ 3z-2w=3 \\ 3w=2 \end{cases}$ SPI

c) $\begin{cases} 2x-3y+4z=5 \\ 2y-5z=7 \\ 0z=2 \end{cases}$ SI

d) $\begin{cases} x+3y-2z+w=1 \\ 3y-2z-3w=2 \\ z-w=1 \\ w=3 \end{cases}$ SPD

303

a) $\{(-3, 2)\}$ b) $\left\{\left(\frac{3a+1}{2}, a\right), a \in R\right\}$

c) $S=\varnothing$ d) $\{(3, -4)\}$

e) $S=\varnothing$ f) $\{(-2, 1, -3)\}$

g) $\{(-1, 2, 5)\}$ h) $S=\varnothing$

i) $\{(-1, 2, -3)\}$

j) $\left\{\left(\frac{4a-19}{7}, \frac{5a-1}{7}, a\right), a \in R\right\}$

304

a) $\{(2, 1, -3, 1)\}$

b) $\left\{\left(0, 2, \frac{1}{3}, \frac{-3}{2}\right)\right\}$ c) $S=\varnothing$

d) $\left\{\left(\frac{6-15a-b}{10}, a, \frac{1+4b}{5}, b\right), a, b \in R\right\}$

305

a) $a \neq 6 \Rightarrow SPD$
$a=6 \Rightarrow SPI$

b) $a \neq -1$ e $a \neq 1 \Rightarrow SPD$
$a=1 \Rightarrow SPI$
$a=-1 \Rightarrow SI$

c) $a \neq -2$ e $a \neq 2 \Rightarrow SPD$
$a=2 \Rightarrow SPI$
$a=-2 \Rightarrow SI$

d) $a=2$ ou $a=3 \Rightarrow SPD$
$a \neq 2\ a \neq 3 \Rightarrow SI$

e) $a \neq 2 \Rightarrow SPD$
$a=2 \Rightarrow SPI$

f) $a \neq -1$ e $a \neq 1 \Rightarrow$ SPD
$a = 1 \Rightarrow$ SPI
$a = -1 \Rightarrow$ SI

306

$a = \frac{3}{2}$, $b = 2$ e $c = -2$

307

a) $\{(0, 0, 0)\}$

b) $\left\{\left(\frac{a}{13}, \frac{-8a}{13}, a\right), a \in R\right\}$

308

a) SPD b) SPI

309

a) $a \neq 0$ b) $a \neq 2$ e $a \neq 4$
c) $a \neq -3$ e $a \neq -12$
d) $a \neq -4$ e $a \neq \frac{-7}{4}$

310

a) $a \neq 0$ e $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD
$a = 2 \Rightarrow$ SPI
$a = 0 \Rightarrow$ SI
b) $a \neq 1$ e $a \neq 6 \Rightarrow$ SPD
$a = 6 \Rightarrow$ SPI
$a = 1 \Rightarrow$ SI
c) $a \neq 0$ e $a \neq 5 \Rightarrow$ SPD
$a = 0$ ou $a = 5 \Rightarrow$ SPI
d) $a \neq 0$ e $a \neq 4 \Rightarrow$ SPD
$a = 0$ e $b = 0$ ou $a = 4$ e $b = 8 \Rightarrow$ SPI
$a = 0$ e $b \neq 0$ ou $a = 4$ e $b \neq 8 \Rightarrow$ SI
e) $a \neq -2$ e $a \neq 3 \Rightarrow$ SPD
$a = 3 \Rightarrow$ SPI
$a = -2 \Rightarrow$ SI

f) $a \neq \frac{-9}{5}$ e $a \neq -1 \Rightarrow$ SPD

$a = \frac{-9}{5} \Rightarrow$ SPI

$a = -1 \Rightarrow$ SI

311

$a \neq 0$ e $a \neq -1 \Rightarrow$ SPD
$a = 0$ ou $a = -1 \Rightarrow$ SI

312

$a = -1$ ou $a = 1$

313

Para qualquer $a \neq 1$

314

$a \neq -\frac{1}{2}$, $a \neq 0$ e $a \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ SPD

$a = 0$ ou $a = \frac{1}{2} \Rightarrow$ SPI

$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ SI

315

$m = -1$ ou $m = 0 \Rightarrow$ SPD
$m \neq -1$ ou $m \neq 0 \Rightarrow$ SI

316

$K \neq -\frac{1}{2}$ e $K \neq 1 \Rightarrow$ SPD

$K = -\frac{1}{2}$ ou $K = 1 \Rightarrow$ SPI

317

$a \neq -6$ e $a \neq 3 \Rightarrow$ SPD
($a = -6$ e $b = -5$) ou
($a = 3$ e $b = 1$) $\Rightarrow$ SPI
($a = -6$ e $b \neq -5$) ou
($a = 3$ e $b \neq 1$) $\Rightarrow$ SI

318

a) Sim b) Sim c) Não

319

$a = 3$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = -1$

320

a) Sim b) Não c) Sim
d) Sim, se $a = z$ e Não se $a \neq z$

321

a) 2 b) Qualquer $a \in R$

322

Não existe

323

a) Sim b) Não c) Sim
d) Sim e) Sim

324

a) Sim b) Não c) Sim

325

a) $a = 2, b = -4$ b) $a = -3, b = 1$

326

$a = -1, b = 9$ e $c = 3$

327

a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

328

a) $\begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ x + 7y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + 7y + z = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$

329

$\{(3, 2)\}$

330

$\{(3, -1, -2)\}$

331

a) Sim b) Não c) Não
d) Sim e) Não f) Não

332

a) $a \neq -1$ b) $a \neq 2$

333

$\{(1, 2, 2, 0)\}$

334

a) $\{(2, -3)\}$ b) $\{(3, -2)\}$
c) $\{(7, 5)\}$ d) $\{(2, -2, 3)\}$
e) $\{(3, -2, 1)\}$ f) $\{(1, -1, 0, 2)\}$
g) $\{(1, -1, 1, -1, 1)\}$

335

a) $\{(3, 2, 1)\}$
b) $\{(3, 1, -2)\}$
c) $\{(-3, 2, 1)\}$

336

$a = 2, b = -3, c = 4$

337

$a \neq -5$ e $\{(a, 1 + a, 1)\}$

338

$a \neq -7$ e $a \neq -6$ e $\{(0, 0, 0)\}$

339

a) Sim b) Não c) Sim

340

a) $\{(8, 2)\}$

b) $\{(2, 2)\}$
c) $\{(-4, -3)\}$
d) $\{(11, 5, 1)\}$
e) $\{(6, 2, 2, 0)\}$

341
a) SPD b) SI c) SPI

342
a) $\{(a + 5, 2a + 2, a), a \in R\}$
b) $\{(3a - b + 16, a, -b + 6, b), a, b \in R\}$
c) $\{(2, -2a + 2, 3a + 3, a), a \in R\}$

343
a) $\{(-2, -3, -2)\}$
b) $S = \varnothing$
c) $\{(3a - 1, a, 1, 3), a \in R\}$

344

a) $a \neq 0 \Rightarrow S = \left\{\frac{7}{a}\right\}$
$a = 0 \Rightarrow S = \varnothing$

b) $a \neq 2 \Rightarrow S = \left\{\frac{5}{a-2}\right\}$
$a = 2 \Rightarrow S = \varnothing$

c) $a \neq 0 \Rightarrow S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$
$a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow S = R$
$a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow S = \varnothing$

d) $a \neq 2 \Rightarrow S = \left\{\frac{b}{a-2}\right\}$
$a = 2$ e $b = 0 \Rightarrow S = R$
$a = 2$ e $b \neq 0 \Rightarrow S = \varnothing$

e) $a \neq 0 \Rightarrow S = \left\{\frac{b-7}{a}\right\}$
$a = 0$ e $b = 7$ $S = R$
$a = 0$ e $b \neq 7 \Rightarrow S = \varnothing$

f) $a \neq 1 \Rightarrow S = \left\{\frac{b+1}{a-1}\right\}$
$a = 1$ e $b = -1 \Rightarrow S = R$
$a = 1$ e $b \neq -1 \Rightarrow S = \varnothing$

g) $a \neq 2 \Rightarrow S = \{1\}$
$a = 2 \Rightarrow S = R$

h) $a \neq 2 \Rightarrow S = \left\{\frac{a+2}{a-2}\right\}$
$a = 2 \Rightarrow S = \varnothing$

i) $a \neq 1 \Rightarrow S = \left\{\frac{a+1}{a-1}\right\}$
$a = 1 \Rightarrow S = R$

j) $a \neq -1$ e $a \neq 1 \Rightarrow S = \left\{\frac{a-1}{a+1}\right\}$
$a = -1 \Rightarrow S = \varnothing$
$a = 1 \Rightarrow S = R$

k) $a \neq -1$ e $a \neq 2 \Rightarrow S = \left\{\frac{b-3}{a-2}\right\}$
$a = -1$ ou $a = 2$ e $b = 3 \Rightarrow S = R$
$a = 2$ e $b \neq 3 \Rightarrow S = \varnothing$

345
a) $a \neq 3 \Rightarrow$ SPD
$a = 3 \Rightarrow$ SI
b) $a \neq 1 \Rightarrow$ SPD
$a = 1 \Rightarrow$ SPI
c) $a = 2 \Rightarrow$ SPD
$a \neq 2 \Rightarrow$ SI
d) $a \neq 1 \Rightarrow$ SPI
$a = 1 \Rightarrow$ SI
e) $a \neq -2, a \neq 2$ e $a \neq 3 \Rightarrow$ SPD
$a = -2$ ou $a = 3 \Rightarrow$ SPI
$a = 2 \Rightarrow$ SI
f) $a \neq -2, a \neq 2$ e $a \neq 3 \Rightarrow$ SPD
$a = -2 \Rightarrow$ SPI
$a = 2$ ou $a = 3 \Rightarrow$ SI

346
a) $a \neq 1 \Rightarrow \{(3a - 3, 2 - a, a - 1)\}$
$a = 1 \Rightarrow$

$$S = \left\{\left(\frac{5b}{2}, \frac{2-3b}{2}, b\right), b \in R\right\}$$

b) $a \neq -1$ e $a \neq 1 \Rightarrow$

$S=\left\{\left(\frac{a}{a+1},\frac{1}{a+1},\frac{1}{a-1}\right)\right\}$

$a=-1$ ou $a=1 \Rightarrow S=\varnothing$

c) $a\neq 0 \Rightarrow S=\{(a,\ a-1,\ a+1)\}$

$a=0 \Rightarrow S=\{(0,\ -b,\ b),\ n\in R\}$

d) $a\neq 0 \Rightarrow S=\{(a-1,\ 5a-1,\ a+1)\}$

$a=1 \Rightarrow S=\{(8-4b,\ 2b,\ b),\ b\in R$

347

$a=3,\ b=2$

348

$a=2,\ b=-1,\ c=-3$

349

a) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ y-2z=-3, \\ -3z=0 \end{cases}$ SPD

b) $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ y-7z=5, \\ 2z=1 \end{cases}$ SPD

c) $\begin{cases} x-3y-2z+w=1 \\ y-3z+2w=2, \\ 2z-3w=3 \end{cases}$ SPI

d) $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ y-3z=2 \\ 2z=6, \\ 0z=0 \end{cases}$ SPD

e) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-3z=2 \\ (a-1)z=a^2-1 \end{cases}$

$a\neq 1 \Rightarrow$ SPD

$a=1 \Rightarrow$ SPI

f) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ (a-1)y-2z=1 \\ (a+1)z=a-1 \end{cases}$

$a\neq -1$ e $a\neq 1 \Rightarrow$ SPD

$a=1 \Rightarrow$ SPI

$a=-1 \Rightarrow$ SI

350

a) $\{(5,2)\}$ b) $\{(-3,2)\}$

c) $\{(2a+4,\ a),\ a\in R\}$ d) $\{(2,3)\}$

e) $S=\varnothing$ f) $\{(1,2,3)\}$

g) $S=\varnothing$

h) $\{(-55-7a,\ -38-5a,\ a),\ a\in R\}$

351

a) $\{(-2,0,1,-1)\}$

b) $\{(-1,3,-2,2)\}$

c) $S=\varnothing$

d) $\{(6-26a+17b,\ -1+7a-5b,\ a,\ b),$
$a,\ b\in R\}$

352

a) $\{(1,1,-1,-1)\}$

b) $\{(2,-2,1,-1)\}$

c) $\left\{\left(-\frac{2}{5},-\frac{6}{5},\frac{17}{5},1\right)\right\}$

d) $\left\{\left(\frac{2}{3},-1,\frac{3}{2},0\right)\right\}$

e) $\left\{\left(-3,0,-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\right\}$

353

a) $\left\{\left(2,-3,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$

b) $S=\varnothing$ c) $S=\varnothing$

d) $\{(3,-5,4,-2,1)\}$

e) $\left\{\left(\frac{1}{2},-2,3,\frac{2}{3},-\frac{1}{5}\right)\right\}$

354

a) $\left\{\left(\frac{a-9b-2}{11},\frac{-5a+b+10}{11},a,b\right),\right.$

$a, b \in R\}$

b) $\{(a, b, 22a - 33b - 11, -16a + 24b + 8), a, b, \in R\}$

c) $\{(a, b, 1 - 3a - 4b, 1), a, b, \in R\}$

d) $S = \varnothing$ e) $\{(3, 2, 1)\}$

355

a) $\{(a, b, 6 - 15a + 10b, -7 + 18a - 12b), a, b, \in R\}$

b) $\left(\frac{-6+8a}{7}, \frac{1-13a}{7}, \frac{15-6a}{7}, a\right),$ $a \in R$

c) $S = \varnothing$

d) $\{(a, b, -1 - 8a + 4b, 0, 1 + 2a - b)\ a, b, \in R\}$

356

a) $\{(a, b, 13, 19 - 3a - 2b, -34), a, b, \in R\}$

b) $\left\{\left(a, b, -\frac{9}{2} - a - 2b, -\frac{25}{2} - 2a - 4b, -\frac{15}{2} - 2a - 4b\right), a, b \in R\right\}$

c) $\{(3, 0, -5, 11)\}$ d) $S = \varnothing$

357

$$\begin{cases} m \neq -1 \text{ e } m \neq 1 \Rightarrow SPD \\ m = 1 \Rightarrow SPI \\ m = -1 \Rightarrow SI \end{cases}$$

358

$$\begin{cases} a \neq b \Rightarrow SPD \\ a = b = 1 \Rightarrow SPI \\ a = b \neq 1 \Rightarrow SI \end{cases}$$

359

$a = 5$

360

$$\begin{cases} m = -\frac{3}{2} \text{ e } \{(0, -a, a), a \in R\} \\ \text{ou} \\ m = -1 \text{ e } \left\{\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, a\right), a \in R\right\} \end{cases}$$

361

a) $\begin{cases} \lambda \neq 0 \text{ e } \lambda \neq 6 \Rightarrow SPD \\ \lambda = 6 \Rightarrow SPI \\ \lambda = 0 \Rightarrow SI \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda \neq -1 \text{ e } \lambda \neq 2 \Rightarrow SPD \\ \lambda = -1 \Rightarrow SPI \\ \lambda = 2 \Rightarrow SI \end{cases}$

362

a) $\begin{cases} \lambda = 5 \Rightarrow \\ S = \left\{\left(-4 + a, \frac{11}{2} - 2a, a\right), a \in R\right\} \\ \lambda \neq 5 \Rightarrow S = \varnothing \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda \neq -3 \Rightarrow \\ S = \left\{\left(-\frac{1}{\lambda+3}, \frac{4\lambda+11}{3(\lambda+3)}, -\frac{\lambda+11}{3(\lambda+3)}\right)\right\} \\ \lambda = -3 \Rightarrow S = \varnothing \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda \neq -95 \Rightarrow \\ S = \left\{\left(\frac{13}{12} - \frac{23}{12}a, 0, a\right), a \in R\right\} \\ \lambda = -95 \Rightarrow \\ S = \left\{\left(\frac{13}{12} + \frac{19}{12}a - \frac{23}{12}b, a, b\right), a, b \in R\right\} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \lambda \neq -2 \text{ e } \lambda \neq 1 \Rightarrow \\ S=\left\{\left(\frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}\right)\right\} \\ \lambda = 1 \Rightarrow \\ S=\{(1-a-b, a, b), a, b \in R\} \\ \lambda=-2 \Rightarrow S=\varnothing \end{cases}$

e) $\begin{cases} \lambda \neq -2 \text{ e } \lambda \neq 1 \Rightarrow \\ S=\left\{\left(-\frac{1}{\lambda-1}, -\frac{1}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1}\right)\right\} \\ \lambda=-2 \Rightarrow \\ S=\{(-1+a, -1+a, a), a \in R\} \\ \lambda=1 \Rightarrow S=\varnothing \end{cases}$

f) $\begin{cases} \lambda \neq -2 \text{ e } \lambda \neq 1 \Rightarrow \\ S=\left\{\left(-\frac{3}{(\lambda-1)(\lambda+2)}, -\frac{3}{(\lambda-1)(\lambda+2)}, \frac{3(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+2)}\right)\right\} \\ \lambda=-2 \text{ ou } \lambda=1 \Rightarrow S=\varnothing \end{cases}$

g) $\begin{cases} \lambda \neq 1 \text{ e } \lambda \neq 3 \Rightarrow \\ S=\left\{\left(-1, \frac{\lambda-4}{\lambda-3}, -\frac{1}{\lambda-3}\right)\right\} \\ \lambda=1 \Rightarrow \\ S=\{(1-a-b, a, b), a, b \in R\} \\ \lambda=3 \Rightarrow S=\varnothing \end{cases}$

h) $\begin{cases} \lambda \neq 1 \text{ e } \lambda \neq 3 \Rightarrow \\ S=\left\{\left(\frac{2}{3-\lambda}, 0, 0, \frac{3-7\lambda}{(\lambda-1)(3-\lambda)}\right)\right\} \\ \lambda=3 \Rightarrow \\ S=\left\{\left(-\frac{17}{9}-\frac{1}{3}a-\frac{2}{9}b, 2, a, b\right), a, b \in R\right\} \\ \lambda=1 \Rightarrow S=\varnothing \end{cases}$

363

a) $\{(3, 1, 1)\}$ b) $\{(1, 2, -2)\}$
c) $\{(3, 4, 5)\}$ d) $\{(-1, -1, 0, 1)\}$

364

a) $\{(1, 2, -1, -2)\}$
b) $\{(-2, 2, -3, 3)\}$
c) $\{(1, 2, 1, -1)\}$ d) $\{(2, 0, 0, 0)\}$

365

a) $\{(0, 0, 0, 0)\}$ b) $\{(1, -1, 0, 2)\}$
c) $\{(0, 0, 0, 0, 0)\}$ d) $\{(0, 0, 0, 0)\}$

366

a) $\{(0, 0, 0, 0, 0)\}$
b) $\{(1, -1, 1, -1, 1)\}$
c) $\{(0, 2, -2, 0, 3)\}$
d) $\{(2, 0, -2, -2, 1)\}$

367

a) $S=\varnothing$ b) $\{(1, 2, -2)\}$
c) $\{(1, 2, 1)\}$

d) $\left\{\left(-\frac{11}{7}a, -\frac{1}{7}a, a\right), a \in R\right\}$

368

a) $S=\varnothing$ b) $\left\{\left(0, 2, \frac{5}{3}, \frac{-4}{3}\right)\right\}$

c) $\{(-8, 3+a, 6+2a, a), a \in R\}$
d) $\{(2, 1, 1, 1)\}$

369

a) $\{(0, 0, 0, 0)\}$

b) $\left\{\left(\frac{7}{6}b-a, \frac{5}{6}b+a, a, \frac{b}{3}, b\right), a, b \in R\right\}$

c) $\{(-16 + a + b + 5c, 23 - 2a - 2b - 6c, a, b, c), a, b, c, \in R\}$

d) $\left\{\left(\frac{-4a+7b}{8}, \frac{-4a+5b}{8}, \frac{4a-5b}{8}, a, b\right), a, b \in R\right\}$

e) $\{(a, b, 2b - a, 1)\ a, b \in R\}$

370

a) $\{(0, 0, 0, a, a)\ a \in R\}$

b) $\left\{\left(\frac{1+c}{3}, \frac{1+3a+3b-5c}{3}, a, b, c\right), a, b, c \in R\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{2+c}{3}, \frac{1+3a-3b+5c}{6}, a, b, c\right), a, b, c \in R\right\}$

d) $S = \varnothing$ e) $S = \varnothing$ f) $S = \varnothing$

371

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow SPI \\ k \neq 0 \Rightarrow SI \end{cases}$$

372

$\forall m \in C$

373

$$p = \frac{ad}{c},\ q = \frac{bd}{c}$$

374

$$\begin{cases} m \neq -1 \Rightarrow SPD \\ m = -1 \Rightarrow SI \end{cases}$$

375

$$a = \frac{3}{2}$$

376

$$m = \frac{3}{5} \text{ e } k = -6$$

377

$$x_3 = \frac{B}{(a-c)(b-c)(c-d)}$$

378

a)
$$\begin{cases} \lambda \neq 1 \text{ e } \lambda \neq -2 \Rightarrow \\ S = \left\{\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right)\right\} \\ \lambda = 1 \Rightarrow SPI \\ \lambda = -2 \Rightarrow SI \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \lambda = 1 \Rightarrow SPI \\ \lambda = -3 \Rightarrow S \\ \lambda \neq 1 \text{ e } \lambda \neq -3 \Rightarrow \\ S = \left\{\left(-\frac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+3}, -\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda+3}, \frac{2\lambda+1}{\lambda+3}, -\frac{\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+3}\right)\right\} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a \neq b \neq c \neq a \Rightarrow \\ S = \{(abc, -ab - ac - bc, a + b + c)\} \\ a = b \text{ ou } a = c \text{ ou } b = c \Rightarrow SPI \end{cases}$$

379

$$S = \left\{\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\right\}$$

380

a) $p = 2$ b) $p = 4$ c) $p = 3$
d) $p = 1$ e) $p = 0$

381

$$A_E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow p(A) = 3$$

382

a) $p = 2$ b) $p = 3$ c) $p = 2$
d) $p = 2$ e) $p = 3$ f) $p = 3$
g) $p = 4$ h) $p = 3$ i) $p = 2$
j) $p = 3$ k) $p = 5$ l) $p = 6$
m) $p = 5$ n) $p = 3$ o) $p = 4$

383

a) $p = 2, q = 2, n = 2 \Rightarrow$ SPD
b) $p = 2, q = 3 \Rightarrow$ SI
c) $p = 1, q = 1, n = 2 \Rightarrow$ SPI (g.i. = 1)
d) $p = 3, q = 3, n = 3 \Rightarrow$ SPD
e) $p = 2, q = 3 \Rightarrow$ SI
f) $p = 2, q = 2, n = 3 \Rightarrow$ SPI (g.i. = 1)
g) $p = 1, q = 1, n = 3 \Rightarrow$ SPI (g.i. = 2)
h) $p = 3, q = 3, n = 5 \Rightarrow$ SPI (g.i. = 2)
i) $p = 3, q = 5 \Rightarrow$ SI
j) $p = 5, q = 5, n = 5 \Rightarrow$ SPD

384

Se $a = 1 \Rightarrow p = 1$
Se $a = -2 \Rightarrow p = 2$
Se $a = -1 \Rightarrow p = 2$
Se $a \neq 1$ e $a \neq -2$ e $a \neq -1 \Rightarrow p = 3$

385

a) É o número de linhas não nulas dessa matriz depois de escalonada
b) $p = 3$

386

$p_{máx.} = 3$ pois essa matriz terá no maximo 3 linhas não nulas.

387

$p = 2$. Para justificar, escalona-se a matriz dada.

388

Ver enunciado no texto deste apêndice.

389

a) $a = 1$ (ou $a = -1$) $\Rightarrow$ SPI
b) $\nexists a \in R \mid$ o sistema seja impossível.
c) $a = 2$ (ou $\forall a \in R \mid a \neq \pm 1$) $\Rightarrow$ SPD

390

Se $m = -2 \Rightarrow S = \{(0,2)\}$ (SPD)

Se $m = 1 \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ (SPD)

Se $m \neq -2$ e $m \neq 1 \Rightarrow S = 0$ (SI)

391

a) $a \neq 1$ e $\forall b$ ou $a = 1$ e $b \neq \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ Sistema possível
b) $a = -1 \Rightarrow$ SPI (g.i. =1)
c) $a = 1$ e $b = \pm\sqrt{2}$ (g.i. = 2)

392

Se $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD
Se $m = -1$ e $p = 80 \Rightarrow$ SPI (g.i. = 1)
Se $m = -1$ e $p \neq 80 \Rightarrow$ SI

Testes e Questões de Vestibulares

V.1 e

V.2

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

V.3
1 e 0

V.4
$x = -a$

V.5
b

V.6

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

V.7

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

V.8
c

V.9
a

V.10
e

V.11
e

V.12
b

V.13
e

V.14
c

V.15
c

V.16
b

V.17
d

V.18
a

V.19
a) A b) $\lambda = \pm\sqrt{2}$ c) $\pm\sqrt{2}$

V.20
Demonstração

V.21

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

V.22
a

V.23
b

V.24
c

V.25
b

V.26
e

V.27
b

V.28
d

V.29
b

V.30
c

V.31
a

V.32

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

V.33

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

V.34
c

V.35
b

V.36
–1

V.37
c

V.38
a

V.39
b

V.40
e

V.41
b

V.42
c

V.43
d

V.44
V={(2,–3),(2,3)}

V.45

$$\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

V.46
a=4 e b=–3

V.47

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

V.48
e

V.49
d

V.50
c

V.51
c

V.52
a

V.53
a

V.54

$x = -\frac{4}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$

V.55
Demonstração

V.56
a

V.57
b

V.58
A=2 e B=–6

V.59
d

V.60
a) $p(x) = x^3+3x-4$ b) 1

V.61
a) 0 b) 2

V.62
a) –5 b) $-5, \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ e $\frac{5+\sqrt{33}}{2}$

V.63
1

V.64
8

V.65
c

V.66
d

V.67
e

V.68
c

V.69
b

V.70
d

V.71
c

V.72
b

V.73
a

V.74
d

V.75
c

V.76
d

V.77
e

V.78
a

V.79
a

V.80
c

V.81
c

V.82
a

V.83
c

V.84
e

V.85
c

V.86
a) $\begin{Vmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + cx_2 \end{Vmatrix}$ b) Demonstração

c) a = c, b = 0

V.87
12

V.88
3(d–a)

V.89
–25

V.90
3 ou 5

V.91
a

V.92
c

V.93

$\det = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_n \cdot b_{n-1} \cdots r_1$ é sempre positivo pois, sendo n múltiplo de 4, $\frac{n(n-1)}{2}$ é par

V.94
Demonstração

V.95
c

V.96
d

V.97
a

V.98
b

V.99
b

V.100
a

V.101
a

V.102
d

V.103
a

V.104
c

V.105
c

V.106
b

V.107
d

V.108
a

V.109
c

V.110
d

V.111
b

V.112
d

V.113
$4a^2$

V.114
a

V.115
d

V.116
c

V.117
e

V.118
b

V.119
c

V.120
d

V.121
2

V.122
d

V.123

-1 ou $\frac{1}{2}$

V.124
c

V.125
c

V.126
a

V.127
d

V.128
b

V.129
c

V.130
b

V.131
e

V.132
d

V.133
a

V.134
b

V.135
e

V.136
d

V.137
a

V.138
e

V.139
e

V.140
e

V.141
c

V.142
b

V.143
e

V.144
d

V.145
b

V.146
d

V.147
b

V.148
a

V.149
d

V.150
a) -12 b) 96

V.151
a

V.152
a

V.153
c

V.154
a

V.155
a

V.156
b

V.157
a

V.158
$30°, 75°, 75°$ ou $150°, 15°, 15°$

V.159
b

V.160
a) $3(x-2)(x+1)$ b) -1 e 2

V.161
a

V.162
b

V.163
e

V.164
a

V.165
c

V.166
0

V.167
0, 1 e 9

V.168
e

V.169
$\frac{1}{2}\log_2 12$

V.170
d

V.171
a

V.172
e

V.173
b

V.174
0 ou 5

V.175
d

V.176
c

V.177
a

V.178
d

V.179
e

V.180
b

V.181
c

V.182
d

V.183
a) $\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)\right\}$ b) $\varnothing$

c) $\{(4+k,-1-k,k)k \in C\}$

V.184
d

V.185
$\{(-\alpha,\alpha,0),\alpha \in R\}$

V.186
e

V.187
5

V.188
e

V.189
c

V.190
a) paralelas distintas
b) $m = 4$

V.191
-2 ou 1

V.192
d

V.193
$a = 0$ e $b = 1$

V.194
demonstração

V.195
$-\frac{7}{5}$

V.196
$L_1 = \{-7,11\}; L_2 = \varnothing; L_3 = R - L_1$

V.197
4

V.198
3,4,15,20 e (1,1) ou (16 – 4)

V.199
b

V.200
e

V.201
d

V.202
b

V.203
e

V.204
e

V.205
e

V.206
e

V.207
e

V.208
a

V.209
e

V.210
c

V.211
e

V.212
a

V.213
e

V.214
d

V.215
a

V.216
d

V.217
d

V.218
b

V.219
b

V.220
c

V.221
b

V.222
a

V.223
$\frac{3}{5}$ e -5

V.224
$p = \frac{ad}{c}, q = \frac{bd}{c}$

V.225
$m = -1 \Rightarrow$ impossível
$m \neq -1 \Rightarrow$ determinado

V.226

$0 \neq a \neq \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$ determinado

$a = 0$ ou $a\frac{1}{2} \Rightarrow$ indeterminado

$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ impossível

V.227

$a = 1$; $a = -1$; $a \neq \pm 1$

V.228

$m \neq 0 \Rightarrow$ sistema possível e determinado

$m \neq 1 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado

$m = 0$ ou $m = 1 \Rightarrow$ sistema impossível

V.229

$a \neq 1$

V.230

$\forall\, m \in R$

V.231

$\{(2\alpha, 3\alpha, \alpha), \alpha \in R\}$

V.232

$m = 1 \Rightarrow$ indeterminado

$m = -1 \Rightarrow$ impossível

$-1 \neq m \neq 1 \Rightarrow$ determinado

V.233

a

V.234

c

V.235

d

V.236

e

V.237

a

V.238

c

V.239

d

V.240

c

V.241

a) 6 b) $\left(k, \frac{17-6k}{40}, \frac{3}{8}\right) k \in R$

V.242

a

V.243

a) $-3 \neq a \neq 1$ b) $a=1$

V.244

c

V.245

c

V.246

b

V.247

c

V.248

a

V.249

a

V.250

I) $m = 0 \Rightarrow$ sistema impossível e $V = \varnothing$

II) $m = 1 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado $V = \{(1-\alpha, -1, \alpha), \alpha \in R\}$

III) $0 \neq m \neq 1 \Rightarrow$ sistema possível e determinado $V = \left\{\left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right)\right\}$

V.251

6 e 8

V.252

b

V.253

$\{(-1, 2, 2)\}$

V.254
5

V.255
d

V.256
e

V.257
b

V.258
d

V.259
1 ou -1

V.260
p=3; 1 incógnita arbitrária; sistema possível.

V.261
c

V.262
d

V.263
e

V.264
b

V.265
d

V.266
d

V.267
$m \neq -1$

V.268
c

V.269
c

V.270
e

V.271
a

V.272
d

V.273
c

V.274
b

V.275
a

V.276
e

V.277
e

V.278
c

V.279
b

V.280
e

V.281
b

V.282
a

V.283
c

V.284
d

V.285
$m = 2 \Rightarrow$ impossível
$m = -2 \Rightarrow$ indeterminado
$-2 \neq m \neq 2 \Rightarrow$ determinado

V.286
b

V.287
$\{(-2,-3,2)\}$

V.288
b

V.289
a

V.290
c

V.291
d

V.292
$-2 \neq p \neq 1$; $p = 1$; $p = -2$

V.293
4

V.294
e

V.295
c

V.296
b

V.297
b

V.298
-2 e 5

V.299
e

V.300
e

Bibliografia

1) *Antar Neto, Aref e outros - Noções de Matemática; Editora Moderna; 1979.*

2) *Antonov, N. e outros - Problems In Elementary Mathematics For Home Study; Mir Publishers; 1982.*

3) *Apostol, Tom M. - Calculus; Editorial Reverté; 1973.*

4) *Bogomolov, N.V. - Mathematics For Technical Schools; Mir Publishers; 1986*

5) *Dorofeev, G e Outros - Elementary Mathematics, Selected Topics And Problem Solving; Mir Publishers; 1973*

6) *Guelli, Cid A. e outros - Coleção Matemática Moderna; Editora Moderna*

7) *Gusev, V.A. e Mordkovich, A.G. - Mathematics For Those Entering Technical Schools; Mir Publishers; 1986.*

8) *Iezzi, Gelson e outros - Fundamentos de Matemática Elementar; Atual Editora; 1985.*

9) *Krechmar, V.A. - A Problem Book In Algebra; Mir Publishers; 1978.*

10) *Litvinenko, V. e Mordkovich, A. - Solving Problems In Algebra And Trigonometry; Mir Publishers, 1987.*

11) *Machado, Antonio dos Santos - Matemática, Temas e Metas; Atual Editora; 1986.*

12) *Milies, C.P. e Coelho, S.P. - Números, uma Introdução À Matemática; (2ª Edição Preliminar), 1982.*

13) *Spivak, Michael - Cálculo Infinitesimal; Editorial Reverté; 1970.*

14) *Trotta, Fernando e outros - Matemática Por Assunto; Editora Scipione.*

15) *Tulaikov, A.N. e outros - Problemas de Matemáticas Elementales, Editorial Mir; 1972.*

16) *Zaitsev, V.V. e outros - Elementary Mathematics, A. Review Course; Mir Publishers, 1978.*